

بسم الله الرحمن الرحيم

تدوین ای بر هندسه ریمان - فینسلر

نویسنده

دانشیار گروه ریاضیات دانشگاه قم

بهار ۹۶

www.ketab.ir



تالیف: دکتر اکبر طیبی

ناشر: بانیان دانش

صفحه آرا: دکتر طیبی

طراح جلد: احمد شکوری صمدی

تاریخ چاپ: ۱۳۹۶

نوبت چاپ: اول

شمارگان: ۵۰۰

قیمت: ۲۰۰۰۰ تومان

شابک: 978-600-98571-2-8

آدرس الکترونیکی: shakourisamad@gmail.com

کلیه حقوق برا انتشارات بانیان دانش محفوظ است.

آدرس: قم، بلوار آیت اله کاشانی، کوچه ۶۴، پلاک ۱۶

تلفن: ۰۹۱۲۰۷۷۴۲۵۱

سرشناسه	: طیبی، اکبر، ۱۳۵۸ -
عنوان و نام پدیدآور	: Tayebi, Akbar
مشخصات نشر	: مقدمه‌ای بر هندسه ریمان - فینسلر/ اکبر طیبی.
مشخصات ظاهری	: قم: بانیان دانش، ۱۳۹۶.
شابک	: ۲۱۹ ص.
وضعیت فهرست‌نویسی	: ۲۰۰۰۰۰ ریال 8-2-978-600-98571
یادداشت	: فیفا
یادداشت	: واژه‌نامه.
یادداشت	: کتابنامه.
موضوع	: هندسه ریمانی
موضوع	: Geometry, Riemannian
موضوع	: خمینه‌های ریمان
موضوع	: Riemannian manifolds
موضوع	: فضا، فینسلری
موضوع	: Finsler spaces
موضوع	: خمینه‌ها (راضیات)
موضوع	: Manifolds (Mathematics)
رده بندی کنگره	: ۱۳۹۶ م ۷۹/۶۴۹۹
رده بندی دیویی	: ۵۱۶/۳۷۳
شماره کتابشناسی ملی	: ۴۹۸۶۵۶۶

مقدمه نویسنده

جرقه اصلی پیدایش هندسه فینسلر، زمانی زده شد که ریمان سخنرانی معروفش را در مورد منیفلدها و تانسورهای انحنا در سال ۱۸۵۴ ارائه نمود. تنها شخصی که در این سخنرانی تحت تاثیر عمق کارهای ریمان و اثرات بعدی آن قرار گرفت، گاوس بود. ریمان در این سخنرانی، یک فرم مربعی دیفرانسیل پذیر بصورت $g = g_{ij}(x)dx^i dx^j$ را در حالت خاص مورد بررسی قرار داده بود. او ویژگی بسیار مهمی در این حالت خاص مشاهده کرده بود که با توجه به آن، تانسور انحنا، انحنا برشی را روی این فضا می توان معرفی کرد. تیلور با کمک این تعاریف، متر ریمانی را توسعه داد.

تانسور انحنا ریمان نقش بسیار مهمی در هندسه ریمانی ایفا می کند. به عنوان مثال، یک مسئله اساسی در هندسه ریمانی این است که چگونه می توان دو ساختار ریمانی متفاوت را فقط با یک تغییر مختصات بر هم منطبق ساخت. این مسئله در سال ۱۸۷۰ توسط کریستوفل^۱ و لپشیتس^۲ به صورت مستقل از هم و بدون کمک گرفتن از محاسبات تانسوری به دست آمد. پس از آن، در سال ۱۹۱۷ لویی-چوی ویتا مفهوم هم انرژی الصاق را با یک تعبیر هندسی ساده به دست آورد.

لازم به ذکر است که ریمان تفاوت بین حالت مربعی $g_{ij} = g_{ij}(x)dx^i dx^j$ و حالت کلی $g_{ij} = g_{ij}(x, y)dx^i dx^j$ را مشاهده کرد، اما به نظری حالت کم هرگز اتفاق نمی افتاده، مطالعه حالت کلی هدر دادن وقت بوده و ایده جدیدی برای پیشرفت هندسه دیفرانسیل به وجود نمی آورد. این موضوع پیشرفت هندسه فینسلر را در حدود ۶۰ سال به تعویق انداخت. خوشبختانه فینسلر بدون اطلاع از کارهای ریمان، تحت نظر استاد راهنمایش کاراتئودوری، شروع به کار روی حساب تغییرات کرد. او کار خود را از هندسه جدیدی که کاراتئودوری در ارتباط با فرم های پارامتری به دست آورده بود، شروع نمود. هسته اصلی این موضوع، بررسی

^۱ Christoffel

^۲ Lipschitz

ایندیکاتریس^۳ (به نوعی دایره ی فینسلری) بود که در آن شرط محذب بودن بسیار مهم بوده و شرط مینیمم در محاسبه تغییرات یک شرط لازم بود. در واقع هندسه فینسلر ارتباط مستقیمی با حساب تغییرات دارد. مطالعه دقیق تر این موضوع به کارهای ژاکوبی و کنزر^۴ برمی گردد. هیلبرت در سخنرانی خود در سال ۱۹۰۰ در پاریس، ۲۳ مسئله حل نشده را بیان نمود که آخرین سوال آن مربوط به حساب تغییرات بود. این سوال تنها مسئله ای بود که هیلبرت نتوانسته بود به عنوان یک سوال مشخص حدس بزند. پس از آن کنزر یک تخمین قابل قبول برای حساب تغییرات به دست آورد. در نتیجه هندسه فینسلر بصورت بسیار آرام ولی بطور مستمر در مسیر توسعه قرار گرفت.

در واقع یک مت فینسلر خانواده ای از نرم های مینکوفسکی روی یک فضای مماس است. البته با وجودی که هندسه فینسلر با یک نرم روی فضای مماس آغاز شد؛ این فضا، یک خانواده کلی تر از فضای ضرب داخلی محسوب می شود. مشابه هندسه ریمان، مسئله هم ارزی در فضاهای فینسلری مطرح شد. یعنی چگونه می توان دو ساختار فینسلری متفاوت را با یک تغییر مختصات بر هم منطبق بسازیم. معقول است که انتظار داشته باشیم این مسئله، مانند فضای ریمانی با الصاق ها و انحناهایشان حل شود. در هندسه ریمانی، الصاق لویی-چوی ویتا که با استفاده از نمادهای کریستوفل معرفی شد، دارای دو ویژگی مهم است: متریک-سازگار و تاب-آزاد. اما در الصاق های فینسلری این دو شرط به طور همزمان اتفاق نمی افتد.

در سال ۱۹۲۶، بروالد یک الصاق با دو تانسور انحنا به دنیای هندسه فینسلر معرفی نمود. الصاق بروالد تاب-آزاد بوده اما متریک-سازگار نمی باشد. تانسورهای انحنا مربوط به الصاق بروالد hh -انحنا و hv -انحنا هستند که hh -انحنا شبیه انحنا ریمان بوده و تانسور hv -انحنا (یا همان انحنا بروالد) در فضای ریمانی صفر است. در نتیجه مشکل مربوط به مسئله هم ارزی ها در هندسه فینسلر حل شد.

^۳ Indicatrix

^۴ Adolf Kneser

در سال ۱۹۳۴، الی کارتان^۲ رساله خود را روی فضاهای فینسلری منتشر کرد. کارتان الصاقی معرفی کرد که متریک-سازگار بوده ولی دارای تاب می‌باشد. او با استفاده از این الصاق (که بعدها به الصاق کارتان معروف شد)، نشان داد که مشتق کوارینانت در فضاهای فینسلری هم موجود است. کارتان همچنین تئوری انحناها را توسعه داد و عملاً همه مطالعات بعدی فضاهای فینسلری با این دیدگاه بررسی می‌شود. لازم به ذکر است که صورت کلی ساختار های الصاق کارتان توسط اکبرزاده بیان شده است.

از سال ۱۹۳۴، ریاضیدانان بزرگ از سرتاسر دنیا، هندسه فینسلر را با الهام از کارهای کارتان مطالعه کرده و نتایج جالبی به دست آوردند. راندرز هنگام مطالعه نظریه وحدت میدان های گرانشی و الکترومغناطیس، در فضاهای ۴-بعدی یک متر فینسلری خاص را معرفی کرد که در نظریه گرانش و الکترومغناطیس کاربرد داشته و توجه فیزیکدان ها را به هندسه فینسلری معطوف کرد. این متر بعدها به متر راندرز معروف شد.

در سال ۱۹۵۱، راندا^۱ یک موازی سازی دیدگاه هندسه مینکوفسکی بوجود آورد. کارتان این موازی سازی را از دیدگاه هندسه اقلیدسی بیار کرده بود. اما ایده کار راندا موجب ایجاد مطالعات جدید هندسه فینسلر شد. لازم به ذکر است که در سال ۱۹۶۳، اکبرزاده فضاهای فینسلر را بر اساس نظریه الصاق ها روی کلاف فیهره بیان کرده و این نظریه در سال ۱۹۷۰ توسط ماتسوموتو کامل شد.

مطالعات اخیر در راستای بسط برخی نتایج و قضیه های هندسه ریمانی به هندسه فینسلری است. در سال های اخیر هندسه فینسلر نه تنها به عنوان موضوعی مدرن که شامل قضایا و تکنیک های متعدد است، بلکه به عنوان موضوعی مهم در حل مسائل ترمودینامیک، اپتیک، اکولوژی، بیولوژی، تئوری زمین لرزه، نظریه رشد مرجان های دریایی، ذوب فلزات، مکانیک فیزیک کوانتوم و . . . پیشرفت های چشمگیری داشته است.

^۲Elie Cartan

^۱H. Rund

کتابی که پیش روی خوانندگان قرار دارد، توسط نویسنده مابین سال های ۹۰ تا ۹۵ به صورت یک جزوه ی درسی برای دانشجویان ترم آخر کارشناسی ارشد و دانشجویان دکترای هندسه تدریس شده است. پس از بارها تدریس و رفع اشکال های دست نوشته های مربوطه تصمیم گرفتم تا آن را به صورت یک کتاب درسی در اختیار دانشجویان و اساتید علاقه مند به هندسه ی فینسلر قرار دهم. در ابتدا مقدمه ای از هندسه ریمان شامل تانسورها، الصاق ها، ژئودزی ها آورده شده است. در ادامه وارد هندسه فینسلر شده، مفاهیم مقدماتی شامل الصاق ها و انحناهای ریمانی و غیر ریمانی را ارائه می دهیم. سپس سه دسته ی مهم از مترهای فینسلری، یعنی مترهای هندزبرگ تعمیم یافته، مترهای فینسلری ریشه m -ام و مترهای داگلاس ویل تعمیم یافته را مطالعه خواهیم کرد.

در اینجا برخود لازم می دانم که از اساتید ارجمندم جناب آقای پرفسور بهروز بیدآباد، پرفسور مرتضی میر محمدنژادی، پرفسور اسدالله رضوی، پرفسور ناصر بروجردیان و پرفسور مگردیچ تومانیان که تدریس شان الهام بخش به وجود آمدن این کتاب می باشد، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم. همچنین از همکاران برجوارم جناب آقایان دکتر بهزاد نجفی، دکتر مرتضی فغفوری، دکتر سینا هدایتیان، دکتر بهمن رضایی، دکتر مهدی رفیعی راد، دکتر حمیدرضا سلیمی مقدم، دکتر داریوش لطیفی و سرکار خانم دکتر نازنین صادق زاده، که مشوق بنده برای نگارش این کتاب بوده اند، قدردانی می نمایم. از سرکار خانم دکتر ایزدیان که همواره کمک حال بنده برای اصلاح شکل ها و اشتباهات تایپی بوده است، کمال تشکر را دارم. با تمام تلاشی که در جهت تکمیل و بهتر شدن این اثر انجام داده ام، کتاب بدست آمده خالی از اشتباه نمی باشد. لذا از کلیه ی انتقادات و پیشنهاداتی که در مورد مطالب و مفاهیم کتاب از طرف خوانندگان به بنده ارسال شود بسیار متشکر خواهم شد.

اکبر طیبی

تابستان ۱۳۹۵

فهرست مطالب

۱	هندسه ریمن	۱۳
۱.۱	تانسورها	۱۴
۱.۱.۱	تانسورها روی یک فضای برداری	۱۵
۲.۱.۱	p -فرمی ها	۱۷
۳.۱.۱	ضرب تانسورها	۱۸
۴.۱.۱	مولفه های تانسور و قاعده جمع بندی انیشتین	۱۹
۲.۱	منیفلد و کلاف برداری	۲۱
۱.۲.۱	منیفلد	۲۱
۲.۲.۱	کلاف های برداری	۲۱
۳.۲.۱	کلاف برگشت	۲۲
۴.۲.۱	کلاف های تانسوری و میدان های تانسوری	۲۴

۳.۱	مترریمان	۲۶
۱.۳.۱	مؤلفه های مترریمان	۲۶
۲.۳.۱	مثالهایی از مترهای ریمانی	۲۷
۳.۳.۱	متریک القایی	۲۸
۴.۳.۱	متریک حاصلضربی	۲۹
۵.۳.۱	یکمتری	۲۹
۴.۱	مختارهای اولیه ی مربوط به یک مترریمانی	۳۰
۱.۴.۱	ریمانیستیک اندیس ها	۳۰
۵.۱	تعمیم هایی از متریک ریمانی	۳۲
۱.۵.۱	متریک شبه ریمانی	۳۲
۲.۵.۱	متریک های زیر-ریمانی	۳۳
۳.۵.۱	مترهای فینسلری	۳۴
۶.۱	فضاهای مدل در هندسه ریمانی	۳۴
۱.۶.۱	صفحه ی اقلیدسی	۳۵
۲.۶.۱	کره ها	۳۵
۳.۶.۱	فضاهای هذلولوی	۳۶
۷.۱	الصاق	۳۹

۴۰	۱.۷.۱	الصاق روی کلاف برداری
۴۱	۲.۷.۱	الصاق خطی
۴۳	۳.۷.۱	وجود الصاق خطی
۴۵	۴.۷.۱	مشتق همگرد یک میدان تانسوری
۴۸	۵.۷.۱	مشتق همگرد در طول منحنی
۵۱	۶.۷.۱	انتقال موازی
۵۱	۷.۷.۱	زنودزیک
۵۳	۸.۷.۱	الصاق ریمانی
۶۳	۸.۱	انحنای
۷۱	۱.۸.۱	انحنای ریمان
۷۲	۲.۸.۱	خواص تانسور انحنای ریمان
۷۶	۳.۸.۱	انحنای ریچی و انحنای عددی
۷۸	۴.۸.۱	انحنای برشی (انحنای مقطعی)

۲ هندسه فینسلری ۸۱

۸۲	۱.۲	هندسه اقلیدسی، ریمانی و فینسلری
۸۳	۲.۲	تعریف متر فینسلر
۸۳	۱.۲.۲	تابع همگن

۲.۲.۲	معادلات اوایلر	۸۵
۳.۲.۲	قضیه کاراتئودوری	۸۶
۴.۲.۲	شرایط اساسی برای یک مساله حساب تغییرات	۸۹
۵.۲.۲	نرم مینکوفسکی	۹۰
۶.۲.۲	فضاهای موضعاً مینکوفسکی	۹۲
۳.۲	تانسور کارتان	۹۴
۴.۲	اسپری	۹۶
۱.۴.۲	فرهای آنتولی	۹۷
۲.۴.۲	انحنای بروالد	۹۷
۳.۴.۲	انحنای ایزوتروپیک بروالد	۹۹
۴.۴.۲	انحنای میانگین بروالد	۹۹
۵.۴.۲	تبدیلات تصویری	۱۰۰
۶.۴.۲	انحنای لندزبرگ	۱۰۳
۷.۴.۲	انحنای میانگین لندزبرگ	۱۰۴
۵.۲	الصاق چرن	۱۰۵
۶.۲	الصاق بروالد	۱۰۶
۱.۶.۲	کمیت غیر ریمانی H	۱۰۸

۲.۶.۲	انحنای استرچ	۱۰۹
۷.۲	انحنای پرچمی	۱۰۹
۱.۷.۲	حجم در منیفلد های فینسلری	۱۱۱
۲.۷.۲	تابع انحراف	۱۱۱
۳.۷.۲	S-انحنا	۱۱۲
۸.۲	انحنای ویل	۱۱۳
۹.۲	متر دگلاں - ویل تعمیم یافته	۱۱۵
۱۰.۲	مترهای فینسلری و مجموعا دوگان مسطح	۱۱۶
۱۱.۲	تبدیلات تصویری	۱۱۶
۱۲.۲	مترهای فانک و فانک تعمیم یافته	۱۱۹
۱.۱۲.۲	متر هیلبرت	۱۲۱
۲.۱۲.۲	متریک فانک تعمیم یافته	۱۲۳
۱۳.۲	(α, β) -متریک	۱۲۳
۱.۱۳.۲	متر راندرز	۱۲۶
۲.۱۳.۲	برخی (α, β) -متریک های غیر راندرزی	۱۲۷
۳.۱۳.۲	اسپری (α, β) -متریک ها	۱۲۸
۱۴.۲	انحنای (α, β) -متریک ها	۱۲۹

- ۱.۱۴.۲ انحناى لندزبرگ (α, β) -متریک ها . . . ۱۲۹
- ۲.۱۴.۲ انحناى لندزبرگ ضعیف (α, β) -متریک ها ۱۳۲
- ۳.۱۴.۲ تاب میانگین کارتان (α, β) -متریک ها . ۱۳۵
- ۴.۱۴.۲ S -انحناى (α, β) -متریک ها ۱۳۶
- ۵.۱۴.۲ انحناى داگلاس (α, β) -متریک ها . . . ۱۳۸
- ۱۵.۲ (α, β) -متریک‌های با ضرایب اسپری خاص . . . ۱۳۹
- ۱۰.۱۵.۲ (α, β) -متریک‌های بروالدی ۱۳۹
- ۲.۱۵.۲ (α, β) -متریک‌های موضعا مسطح تصویری ۱۴۰
- ۳.۱۵.۲ (α, β) -متریک‌های موضعا دوگان مسطح ۱۴۱
- ۱۶.۲ تمرینات ۱۴۴

۳ مترهای لندزبرگ تعمیم یافته ۱۵۳

۱.۳ مقدمه ۱۵۴

۱.۱.۳ مترهای لندزبرگ تعمیم یافته فشرده ۱۵۴

۲.۱.۳ مترهای لندزبرگ تعمیم یافته با انحناى ایزوتروپیک

لندزبرگ نسبى ۱۶۱

۳.۱.۳ مترهای لندزبرگ تعمیم یافته داگلاسى . . ۱۶۲

۴ مترهای فینسلری ریشه m - m

۱۶۷	۱.۴	مقدمه
۱۶۸	۲.۴	متر ریشه m - m
۱۶۹	۳.۴	متر ریشه m - m دوگان مسطح
۱۷۱	۴.۴	مترهای آنتونلی ریشه m - m
۱۷۸	۱.۴.۱	مترهای ریشه m - m از انحنا ایزوتروپیک
۱۸۳		میانگین بروالد

۵ مترهای داگلاس - ویل تعمیم یافته

۱۸۲	۱.۵	مقدمه
۱۸۸	۱.۱.۵	یک مثال از مترهای R - مربعی
۱۸۹	۲.۱.۵	یک مثال از مترهای داگلاس - ویل تعمیم یافته
۱۹۳		یافته
۱۹۷	۳.۱.۵	مترهای داگلاس - ویل تعمیم یافته - سرجی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

کتاب نامه