



## معادلات دیفرانسیل

(جلد اول)

مؤلف:

مهندس محمود کریمی

سرشناسه : کریمی، محمود، ۱۳۵۱  
 عنوان و نام پدیدآور : معادلات دیفرانسیل  
 مشخصات نشر : تهران: بسیج دانشجویی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، ۱۳۹۵  
 مشخصات ظاهری : [۳۷۲] ص: مصور (بخشی رنگی)، جدول (بخشی رنگی)  
 شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۶۹۲۷-۶۸-۸  
 وضعیت فهرست‌نویسی : فیبای مختصر  
 یادداشت : این مدرک در آدرس opac.nlai.ir قابل دسترسی است.  
 شماره کتاب‌شناسی ملی : ۳۶۴۵۶۸۳

نام کتاب : معادلات دیفرانسیل - جلد ۱  
 مؤلف : محمود کریمی  
 نشر : بسیج دانشجویی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی  
 نوبت چاپ : اول  
 سال و محل نشر : تهران، ۱۳۹۵  
 ناظر فنی چاپ : علیرضا داودی مقدم - علی غزالی  
 طرح جلد : محمدرضا حاج محمد حسینی  
 صفحه‌آرا : الیاس مهدی‌پور  
 تیراژ : ۱۰۰۰ جلد  
 قیمت : ۱۹۰۰۰ تومان  
 شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۶۹۲۷-۶۸-۸

## مقدمه ناشر

پس از استقبال فراوان از چاپ‌های قبلی کتاب معادلات دیفرانسیل تألیف استاد گرانقدر جناب آقای محمود کریمی بار دیگر این فرصت در اختیار ما قرار گرفت تا با چاپ ویرایش جدید این کتاب خدمت دیگری به دانشجویان مشتاق دانش و داوطلبان آزمون کارشناسی‌ارشد ارائه نماییم.

مرکز خدمات آموزشی نصیر وابسته به بسیج دانشجویی دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی، اولین مرکز آموزشی در حیطه‌ی آمادگی آزمون‌های کارشناسی‌ارشد در کشور است که از شروع فعالیت‌های آن قریب به بیست سال می‌گذرد. این مرکز که در سال ۱۳۷۱ توسط دانشجویان بسیجی دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی راه‌اندازی شد در طی این سال‌ها همواره در حال رشد، ترقی و تعالی بوده است و علاوه بر توسعه حیطه فعالیت‌ها و گسترش کمی مخاطبان، کیفیت آموزش و سطح علمی آن همواره روند رو به رشدی داشته است. با توجه به این که این مرکز زیر مجموعه سازمان بسیج دانشجویی می‌باشد، اصلی‌ترین هدف خود را خدمت رسانی، عدالت آموزشی و ارتقاء علمی دانشجویان قرار داده است و از این جهت شاخص‌ترین مرکز آموزشی در میان موسسات مشابه است. این حقیقت اثرات بارز و مثبتی را در ادراک و انگیزه دانشجویان به عنوان مرکزی خوش‌نام و موفق در میان اساتید و دانشجویان محتاج نظر به خود می‌داند. به علاوه چون مسئولین و کادر این مرکز خود نیز اغلب از دانشجویان دانشگاه‌های تهران هستند بیش از این ارتباط را با دانشجویان مخاطب دارند و همواره از نقطه نظرات آنان استفاده می‌کنند. در زیر نکاتی برای آشنایی بیشتر شما مخاطب گرامی با این مرکز ذکر می‌شود:

(۱) استفاده از اساتید مجرب و طراز اول دانشگاه‌های تهران که به لحاظ علمی جزء سرآمدترین اساتید کشور می‌باشند؛ از اصلی‌ترین نقاط قوت این مرکز است. اعتقاد ما این است که به این هدف مقدس و والا و این موفقیت هرگز نائل نمی‌شدیم مگر با مساعدت و تلاش و همکاری صادقانه اساتید گران‌قدر که در این راه، تمامی پتانسیل و انگیزه‌ی خود را سرلوحه‌ی فعالیت‌های مرکز قرار داده‌اند.

(۲) رویکرد ما همواره افزایش سطح کیفی فعالیت‌ها در عین ارائه آن با کمترین هزینه می‌باشد که با تحقق آن هدف اصلی ما که خدمت‌رسانی و ارتقاء هر چه بیشتر علمی دانشجویان این مرز و بوم در کنار عدالت آموزشی می‌باشد محقق می‌شود و در این میان از حجم فعالیت‌های موسسات سودمحموری که با تبلیغات رنگارنگ جیب مخاطبان را خالی می‌کنند، می‌کاهد.

(۳) با توجه به برگزاری ۲۵ سال کلاس‌های آموزشی و ۱۵ سال آزمون‌های آزمایشی، تجربه‌ی گران‌بهای اندوخته‌ایم که یکی از عوامل اصلی موفقیت روزافزون ما است. این تجربیات که سایر موسسات نیز در پارامترهای آن موارد از آن استفاده کرده و الگو گرفته‌اند، همواره مرکز خدمات آموزشی نصیر را در جایگاه پیشروترین موسسه آموزشی کارشناسی‌ارشد قرار داده است.

(۴) با توجه به وابستگی این مرکز به سازمان بسیج دانشجویی و با توجه به اهداف مذکور هزینه خدمات ارائه شده کمترین مقدار را در میان تمامی موسسات مشابه دارا می‌باشد. این اختلاف عمیق بعضاً

باعث تعجب و ایجاد سوال برای مخاطبانی که تازه با این مرکز آشنا شده‌اند گردیده ولی پس از آشنایی بیشتر با این مجموعه پاسخ سوال خود را دریافت نموده‌اند.

با عطف به سابقه درخشان این مرکز در طی این سال‌ها و ضعف موجود در زمینه‌ی کتاب‌های کارشناسی‌ارشد به لحاظ کیفی، این مجموعه تصمیم گرفت که در این زمینه نیز وارد شده و افتخاری دیگر به افتخارات خود بیفزاید.

مجموعه کتاب‌های کارشناسی‌ارشد نصیر که از این پس به تدریج در اختیار علاقه‌مندان قرار خواهد گرفت، مجموعه‌ای به نظیر با رویکردی نوین و ویژگی‌های منحصر به فرد می‌باشد به طوری که داوطلبان بعد از مراجعه به آن نیاز به استفاده از منابع دیگر نخواهند داشت. نظر به همکاری اساتید گرانقدری که با خود کوله‌باری از تجربه ارزشمند علمی در سطح دانشگاه‌ها و کلاس‌های مرکز خدمات آموزشی نصیر را دارند و رعایت بالاترین کیفیت در صفحه‌آرایی و چاپ، دانشجویان عزیز لذت واقعی یادگیری را خواهند چشید. در این جا لازم است از زحمات فراوان استاد در قدس، جناب آقای محمود کریمی در تالیف این اثر ارزشمند کمال قدردانی را بنماییم. در پایان اجر معنوی فعالیت‌های این مرکز را تقدیم می‌کنیم به شهدای دفاع مقدس، این شمع‌های همیشه فروزان بشریت که با مقاومت مردم خود حماسه‌ی جاوید آفریدند.

## مقدمه مؤلف

خوشحالم که فرصتی ایجاد شد تا پس از گذشت بیش از ۲۰ سال تدریس در کلاس‌های آمادگی آزمون کارشناسی ارشد کتابی در زمینه‌ی معادلات دیفرانسیل جهت پوشش نیاز دانشجویان در این آزمون آماده کنم.

ویرایش جدید کتاب به صورت دو جلدی ارائه می‌شود که جهت استفاده بهینه از کتاب در زیر به مشخصات کتاب و نحوه‌ی مطالعه آن به اختصار می‌پردازم.

این کتاب جهت آمادگی در آزمون کارشناسی ارشد نوشته شده است و مطالب آن به طور کامل نیاز دانشجویان را در این آزمون پوشش می‌دهد به همین جهت مطالبی که در این آزمون کمتر مورد توجه بوده‌اند با عنوان «تست تکمیلی» در کتاب آورده شده‌اند. در بعضی مباحث به اثبات هم پرداخته شده است که مطالعه آن ضرورت ندارد فقط جهت درک و ماندگاری بیشتر مطلب در ذهن آورده شده است.

در جلد اول، آموزش درس به همراه دسته‌ی منتخب از آزمون‌های کارشناسی ارشد پرداخته شده است که توصیه می‌شود مطالب هر فصل جلد اول با رصه زیاد مطالعه و خلاصه برداری شود و پس از آن تست‌های آن فصل در جلد دوم حل شود. در مرحله اول حل حداقل ۲۵ درصد تست‌های آن فصل توصیه می‌شود.

برای آن‌که نشان داده شود مطالب جلد اول نیاز شد را را در کارشناسی ارشد به طور کامل پوشش می‌دهد، هیچ تستی به صورت سلیقه‌ای حذف نشده است. تمامی تست‌های گرایش‌های مهندسی برق، مکانیک و عمران از سال ۱۳۷۰ و تمام تست‌های گرایش ریاضی محض از سال ۷۶ و تمامی تست‌های سایر گرایش‌ها از سال ۷۹ در جلد دوم آورده شده است.

روش‌هایی که در این کتاب مطرح شده است به اعتقاد مؤلف بهترین روش برای حل تست‌های آزمون کارشناسی ارشد است، اگر در حل بعضی معادلات قبلاً از روش‌های دیگری استفاده می‌کردید توصیه می‌شود آن روش‌ها را کنار گذاشته و به شیوه گفته شده در این کتاب حل کنید.

به دلیل امانت‌داری و هم‌چنین آشنایی دانشجویان با تست‌ها به همان صورتی که در آزمون کارشناسی ارشد آمده‌اند سعی شده است هیچ تغییری در صورت تست‌ها داده نشود و به همان صورت در کتاب آورده شده‌اند.

توصیه می‌شود که ۹۰ درصد زمانی که برای این درس اختصاص می‌دهید را صرف یادگیری و تمرین مباحث اصلی کنید و ۱۰ درصد به مطالب تکمیلی بپردازید. دانشجویانی که فرصت خیلی کم دارند می‌توانند از مباحث تکمیلی صرف‌نظر کنند.

مشکل‌تر می‌باشند در صورت نیاز به تسلط بیشتر می‌توانید به آن‌ها بپردازید.

- (۸) در انتهای هر فصل یک آزمون آورده شده است که توصیه می‌شود پس از مطالعه کامل فصل و حل تست‌های مربوط به آن در جلد دوم، به حل آن آزمون بپردازید.
- (۹) حجم مطالب درس معادلات دیفرانسیل کم است، ولی حجم بودن کتاب به دلیل حل تست‌ها و مثال‌های متنوع در متن درس است. به همین دلیل همراه با مطالعه خلاصه برداری توصیه می‌شود.
- (۱۰) توصیه می‌شود به شیوه‌ای که در متن کتاب گفته شده این درس را مطالعه و تمرین کنید. یعنی اگر موفق به حل یک معادله دیفرانسیل نشدید، بررسی کنید که چه عاملی باعث آن است. مثلاً ممکن است شما نوع معادله را درست تشخیص نداده باشید که در نتیجه می‌توانید زمانی را برای این موضوع اختصاص بدهید و سعی کنید با تمرین روی تست‌های متفاوت نقص تشخیص نوع معادله را جبران کنید و همین‌طور برای عوامل دیگر.
- (۱۱) تکرار و حل تمرین در تست زیاد در این درس نقش کلیدی دارد، توصیه می‌شود پس از مطالعه هر بخش و حل تست‌های آن در برنامه‌ای منظم و هفتگی اقدام به حل باقیمانده تست‌های آن فصل نمایید. البته اگر زمانی که در مرحله اول تمام تست‌ها را حل کرده‌اید مجدد از همان تست‌ها انتخاب و حل نمایید.
- (۱۲) پیش‌نیاز این درس مطالب درسی ریاضی عمومی ۱ است که به خصوص مبحث انتگرال نامعین. بنابراین اگر در ضمن مطالعه کتاب متوجه روستی مباحث انتگرال‌ها نشدید، توصیه می‌شود کتاب «روش‌های محاسبه‌ی انتگرال نامعین» تألیف اینجانب که حدود ۶۰ صفحه است، تهیه و مطالعه نمایید.
- در پایان از همکاری مرکز خدمات آموزش نصیر و تلاش‌های آقایان:هندس احسان ابویی و علیرضا داودی مقدم و از زحمات آقای مهدی‌پور در تایپ و صفحه‌آرایی کتاب قدردانی می‌کنم. ضمناً از آقای هومن محمدی به جهت همکاری در ویرایش کتاب تشکر و قدردانی می‌گردد.
- از اساتید و دانشجویان محترم خواهشمند است پیشنهادات و نظرات و انتقادات خود را از طریق وبسایت شخصی اینجانب اطلاع‌رسانی نمایند.

بدون گذشت و همراهی همسرم انجام این کار میسر نبود. سپاس فراوان بخاطر تمامی محبت‌ها و همراهی‌هایش.

محمود کریمی

زمستان ۱۳۹۵

web-site: m-karimi.ir

Email:mahmud\_karimy@yahoo.com

## فهرست مطالب

|    |                                                                     |
|----|---------------------------------------------------------------------|
| ۱  | فصل اول معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول                               |
| ۱  | تعاریف                                                              |
| ۲  | تعریف معادله‌ی دیفرانسیل خطی و غیر خطی                              |
| ۴  | تعریف مرتبه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل                                    |
| ۴  | معرفی انواع جواب های معادله دیفرانسیل                               |
| ۵  | تشکیل معادله‌ی دیفرانسیل                                            |
| ۹  | معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول                                       |
| ۱۰ | معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی                                     |
| ۱۵ | معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول غیر خطی                               |
| ۱۶ | معادله‌ی تفکیک پذیر                                                 |
| ۱۹ | معادله‌ی هم‌مرتبه                                                   |
| ۲۳ | معادله‌ی کاسی                                                       |
| ۲۷ | فاکتور انتگرال (عامل انتگرال)                                       |
| ۲۷ | تغییر متغیر                                                         |
| ۴۴ | معادله‌ی دیفرانسیل برنولی                                           |
| ۵۸ | محاسبه‌ی مسیرهای قائم                                               |
| ۶۴ | معادله‌ی مرتبه اول درجه‌ی ۲                                         |
| ۶۶ | معادله کلرو                                                         |
| ۷۱ | مباحث تکمیلی                                                        |
| ۷۲ | معادله‌ی لاگرانژ                                                    |
| ۷۳ | معادله‌ی دیفرانسیل ریکاتی                                           |
| ۷۴ | معادله‌ی مرتبه‌ی اول فاقد متغیر مستقل                               |
| ۷۷ | قضیه‌ی وجود یکتایی جواب                                             |
| ۸۰ | مسیرهای هم زاویه                                                    |
| ۸۱ | خلاصه فصل                                                           |
| ۸۴ | مسائل تکمیلی                                                        |
| ۸۰ | گزیده‌ای از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول که در سوالات کنکور آمده‌اند |
| ۸۳ | تمرین‌های تکمیلی                                                    |

## آزمون فصل اول

### پاسخ آزمون فصل اول

#### فصل دوم معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم

##### مقدمه

##### معادلات خطی با ضرایب ثابت

محاسبه‌ی جواب عمومی معادله‌ی خطی با ضرایب ثابت همگن

روش‌های محاسبه‌ی جواب خصوصی ( $y_p$ )

##### ضرایب نامشخص

##### اپراتور معکوس

##### تغییر پارامترها

##### معادلات خطی مرتبه‌ی دوم با ضرایب متغیر

##### معادله‌ی کوچی اویلر

##### معادله‌ی کام

استفاده از یک حل معلوم برای یافتن حلی دیگر به روش کاهش مرتبه

استقلال حلی و وابستگی خطی توابع

##### اتحاد آبل

##### تغییر متغیر در معادلات مرتبه‌ی دوم

##### معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی سوم غیرخطی

##### معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم غیرخطی

##### معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم فاقد متغیر

##### معادله‌ی دیفرانسیل غیر خطی همگن

##### مباحث تکمیلی

##### تبدیل به ضرایب ثابت

##### مسائل تکمیلی

## آزمون فصل دوم

### پاسخ آزمون فصل دوم

#### فصل سوم حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری‌های توانی

تعریف نقطه‌ی تکیین منظم و تکیین نامنظم

معادله‌ی شاخصی (معادله‌ی مشخصه)

فرم جواب‌های معادله‌ی دیفرانسیل حول نقطه‌ی تکیین منظم  $x_0$  (روش فروبینوس)

|     |                                                                    |
|-----|--------------------------------------------------------------------|
| ۲۰۱ | حل معادله‌ی دیفرانسیل به فرم سری توانی حول نقطه‌ی عادی $x_0$       |
| ۲۰۱ | روش اول محاسبه‌ی ضرایب                                             |
| ۲۰۴ | روش دوم محاسبه‌ی ضرایب (رابطه‌ی بازگشتی)                           |
| ۲۱۲ | روش سوم محاسبه‌ی روابط بازگشتی و ضرایب (تکمیلی)                    |
| ۲۱۸ | روش چهارم محاسبه‌ی ضرایب (رابطه‌ی بازگشتی) (تکمیلی)                |
| ۲۲۰ | محاسبه‌ی شعاع همگرایی جواب به صورت سری توانی حول نقطه‌ی عادی $x_0$ |
| ۲۲۲ | معادله لژاندر                                                      |
| ۲۳۰ | معادله سل                                                          |
| ۲۴۲ | مباحث تک‌ی                                                         |
| ۲۴۷ | مسائل تکمیلی                                                       |
| ۲۴۹ | خلاصه فصل ۴                                                        |
| ۲۵۱ | آزمون فصل سوم                                                      |
| ۲۵۳ | پاسخ آزمون فصل سوم                                                 |
| ۲۵۷ | فصل چهارم تبدیل لاپلاس                                             |
| ۲۵۷ | مقدمه                                                              |
| ۲۵۷ | شرایط وجود تبدیل لاپلاس                                            |
| ۲۶۲ | محاسبه‌ی تبدیل لاپلاس                                              |
| ۲۶۲ | جدول تبدیل لاپلاس                                                  |
| ۲۶۲ | معرفی تابع گاما                                                    |
| ۲۶۳ | جدول خواص                                                          |
| ۲۷۳ | تبدیل لاپلاس از معادله دیفرانسیل                                   |
| ۲۸۰ | تبدیل لاپلاس توابع چند ضابطه‌ای                                    |
| ۲۸۳ | تبدیل لاپلاس توابع متناوب                                          |
| ۲۸۶ | محاسبه‌ی انتگرال‌های معین با استفاده از تبدیل لاپلاس               |
| ۲۹۰ | لاپلاس وارون                                                       |
| ۲۹۹ | لاپلاس وارون توابع کسری چند جمله‌ای                                |
| ۳۰۲ | حل معادلات انتگرالی با استفاده از تبدیل لاپلاس                     |
| ۳۰۶ | معرفی $\delta$ ، دیراک (تابع ضربه)                                 |
| ۳۰۷ | حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از تبدیل لاپلاس                    |
| ۳۱۴ | حل دستگاه معادلات خطی با استفاده از تبدیل لاپلاس                   |

مسائل تکمیلی

آزمون فصل چهارم

پاسخ آزمون فصل چهارم

فصل پنجم دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی (تکمیلی)

روش تبدیل لاپلاس

روش حذفی

روش اپراتور  $D$

روش استفاده از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه (روش اویلر)

فصل ششم نظریه توصیفی دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی (تکمیلی)

مره

نقطه زینی

نقطه‌ی بحرانی مرکز

لزون

فصل هفتم تابع ویژه، مقدار ویژه، نظریه‌ی اشتورم - لیوویل (تکمیلی)

مسئله‌ی شریم - لیوویل

معادله‌ی اشتورم - لیوویل منظم

www.ketab.ir