



# کاربردهای هندسه آفین و وایل

تالیف

ادواردو گارسیا ریو | سانا نیکوچویچ  
پیتر گیلکی | رامون وازگوز لورنزو

ترجمه

دکتر علی حاجی بدلی  
هیات علمی دانشگاه بناب

انتشارات دانشگاه بناب

۱۳۹۵

عنوان و نام پدیدآور: کاربردهای هندسه آفین و وایل / تالیف ادواردو گارسیا ریو...

[ و دیگران ]؛ ترجمه علی حاجی بدلی.

مشخصات نشر: بناب دانشگاه بناب، انتشارات، ۱۳۹۵.

مشخصات ظاهری: ۲۳۰ ص.

فروست: انتشارات دانشگاه بناب: ۱۰.

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۹۲۶۸۴-۹-۸

وضعیت فهرست نویسی: فیپا

یادداشت: عنوان اصلی: Applications of Affine and Weyl Geometry.

یادداشت: مولفان ادواردو گارسیا ریو، پیتر گیلکی، استانا نیکوچویچ، رامون

واره و ولونزو.

با اشت: کتابنامه.

موضوع: هندسه آفین

موضوع: Geometry, Affine

موضوع: خمینه ریمان

موضوع: Riemannian manifold

شناسه افزوده: گارسیا ریو، ادواردو

شناسه افزوده: Garcia-Rio, Eduardo

شناسه افزوده: حاجی بدلی، علی، ۱۳۵۷ -، مترجم

شناسه افزوده: دانشده بناب

رده بندی کنگره: ۲۹۵ QA۱۰۷/۲

رده بندی دیویی: ۵۱۶/۴

شماره کتابشناسی ملی: ۶۱۲۴

## انتشارات دانشگاه بناب

|                    |                                                                       |
|--------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| عنوان به زبان اصلی | Application of Affine and Weyl Geometry                               |
| نام کتاب           | کاربرد های هندسه آفین و وایل                                          |
| تالیف              | ادواردو گارسیا ریو، پیتر گیلکی، استانا نیکوچویچ، رامون وازگووژ لورنزو |
| مترجم              | علی حاجی بدلی                                                         |
| ویراستار           | مرتضی فغفوری                                                          |
| ناشر               | انتشارات دانشگاه بناب                                                 |
| شابک               | ۹۷۸-۶۰۰-۹۲۶۸۴-۹-۸                                                     |
| شمارگان            | ۱۰۰۰ جلد                                                              |
| نوبت چاپ           | اول ۱۳۹۵                                                              |
| قطع                | وزیری                                                                 |
| قیمت               | ۲۰۰۰۰ تومان                                                           |

@حق چاپ و نشر برای انتشارات دانشگاه بناب، محفوظ است.

آدرس: آذربایجان شرقی - بناب - بزرگراه ولایت - دانشگاه بناب تلفن: ۰۴۱-۳۷۷۴۵۰۰۰

## پیشگفتار مترجم

پروردگار مهربان را سپاس می‌گزارم که توفیق ارزانی داد تا ترجمه‌ی کتابی سودمند درباره‌ی هندسه آفین و وایل به جامعه‌ی دانش پژوهان و محققان تقدیم نمایم. بدون تردید ترجمه و انتشار کتاب‌های علمی و تخصصی روز دنیا می‌تواند در رشد و بالندگی علمی کشورمان نقش بسزایی داشته باشد.

از آنجایی که کتاب مرتبط با آخرین دستاوردها و تحقیقات علمی در زمینه تخصصی هندسه وایل و هندسه آفین به زبان فارسی موجود نبود ما را بر آن داشت تا با تهیه این کتاب، منبع کامل و مورد اعتمادی در این خصوص ارائه دهیم.

کتاب حاضر ترجمه کتاب «Applications of affine and Weyl Geometry» می‌باشد، ترجمه کتاب در عین رعایت کامل محتوای متن، به همان سادگی که در زبان اصلی نگاشته شده است در زبان فارسی نیز حفظ شده است، امید است انتشار آن بتواند برای محققین و اساتید گرانقدر به عنوان کتاب مرجع و برای دانشجویان تحصیلات تکمیلی هندسه به عنوان کتاب آموزشی مورد استفاده قرار گیرد.

جا دارد از جناب آقای دکتر مرتضی سعیدی، عضو محترم هیات علمی دانشگاه تبریز که زحمت ویراستاری علمی و ادبی این اثر را متقبل نمودند صمیمانه تقدیر و تشکر نمایم. هم‌چنین صمیمانه از دکتر رضا عبدی به خاطر مطالعه دقیق و اعلام نظرات ارزشمند جهت ویرایش این اثر تشکر و قدردانی می‌نمایم.

بی‌شک این اثر نیز مشابه تمام آثار بشری عاری از اشکال و خطا نمی‌باشد و لذا از تمام اساتید فرهیخته و خوانندگان بزرگوار این کتاب، استدعا دارد نظرات اصلاحی و پیشنهادات گرانبهای خود را با اینجانب از طریق [haji.badali@bonabu.ac.ir](mailto:haji.badali@bonabu.ac.ir) در میان بگذارند تا در ویرایش‌های بعدی به‌خاطر قرار گیرد.

از انتشارات دانشگاه بناب و اعضای محترم کمیته انتشارات که امکان چاپ این کتاب را برای اینجانب فراهم نمودند، صمیمانه سپاسگزارم و امیدوارم این اثر بتواند گامی هرچند کوچک در راستای اعتلای علمی جامعه دانشگاهی بردارد.

دکتر علی حاجی بدلی  
دانشگاه بناب  
مرداد ماه ۱۳۹۵

## پیشگفتار مولفین

قضیه اساسی هندسه شبه ریمانی به هر متر شبه ریمانی  $g$  ارتباط آفین یکتای،  $\nabla = g \nabla$  که ارتباط لوی-سویتا نامیده می‌شود را نظیر می‌کند (برای اطلاعات بیشتر به مقاله لوی-سویتا [۱۵۱] و به مقاله لوی-سویتا و ریچی [۱۸۸] ارجاع می‌دهیم) و هندسه شبه ریمانی تا حد زیادی روی هندسه این ارتباط متمرکز است. علی‌رغم این، وقتی ساختارهای هندسی مختلفی بررسی می‌شوند، ارتباط‌های طبیعی دیگری نیز وجود دارند، نظیر ساختارهای تقریباً هرمیتی، ساختارهای تقریباً تماسی، ساختارهای وایل که دارای نقش‌یابی باشند. هم‌چنین ارتباط‌های آفین به‌طور طبیعی در هندسه همدیس مطرح می‌شوند. در تمام این حالت‌ها ارتباط‌های آفین با ساختار مورد بررسی سازگارند. از دیدگاه دیگر، به یک ارتباط آفین ارائه شده می‌توان یک ساختار شبه ریمانی نظیر کرد و بدین ترتیب هندسه دو ساختار را با هم مقایسه کرد. به‌عنوان مثال، توسیع ریمانی متر شبه ریمانی طبیعی از علامت خنثی رینولدز کتانژانت یک خمینه آفین هست. این ساختار که دارای نقش مهمی در بسیاری از بررسی‌ها و تحقیق‌ها می‌باشد، از مقاله پاترسون و والکر [۱۷۷] بیان شده است.

این کتاب زمینه‌های مختلف هندسه دیفرانسیل، ساختارهای والکر، توسیع‌های ریمان و هندسه وایل (فرا)-کاهلر مربوط به هندسه دیفرانسیل آفین را مطرح می‌کند. لذا برای دانشجویان تحصیلات تکمیلی که یک دوره درس اساسی در هندسه دیفرانسیل دارند و هم‌چنین به ریاضی دانانی که لزوماً کارشناس در موضوع نیستند یک منبع در دسترس خواهد بود. برای این منظور، فصل ۱ شامل مقدمه اساسی برای موضوعات مطرح در کتاب می‌باشد. مشتق و کروشه‌لی، ارتباط‌ها، هندسه کاهلر و انحنا مورد بررسی قرار گرفته‌اند. مفاهیم مدل انحنایی، قضیه تجزیه اساسی از سینگر-ثورپ [۱۹۴]، هیگا [۱۲۵، ۱۲۶] و تریسری-وانکه [۲۰۱] نه تنها در حالت ریمانی بلکه در حالت شبه ریمانی و فرا-مختلط، هم‌چنین ساختارهای تقریباً فرا-هرمیتی تقریباً هرمیتی هم در حالت ریمانی و هم در حالت شبه ریمانی بیان شده‌اند. کلاس‌بندی گرای-اریبا [۱۱۸] از ساختارهای هرمیتی به ساختارهای تقریباً فرا-هرمیتی و تقریباً شبه-هرمیتی تعمیم پیدا کرده است. هندسه کلاف کتانژانت بدست آمده است (۱-فرم بدیهی، نگاشت ارزیابی، ترفیع کامل) و مترهای متنوعی روی کلاف کتانژانت (توسیع ریمانی، توسیع ریمانی تغییر شکل یافته و توسیع ریمانی تعدیل یافته) تعریف شده است، این مفاهیم با

جزئیات بیشتر در فصل ۲ و فصل ۳ بیان شده‌اند. در ادامه مقدمه‌ای کوتاه بر هندسه والکر و انحنا‌ی بازگشتی بیان شده است. در مورد مترهای والکر خوددوگان بحث و بررسی شده و نشان داده شده است که هر چنین متری ایزومتر با یک توسیع ریمانی است. عملگر ژاکوبی،

$$J(x) : y \rightarrow \mathcal{R}(y, x)x,$$

معرفی شد است و نتایج کلاسیک در ارتباط با فضاهای متقارن، فضاهای از انحنا‌ی مقطعی ثابت، انحنا‌ی مقطعی هولومورفیک ثابت با استفاده از میدان‌های برداری ژاکوبی ارائه شده است. فصل ۱ با مقدمه‌ای مختصر از هندسه طیفی عملگر انحنا به اتمام رسیده است. تا حد ممکن اثبات مضایا کامل ارائه شده است تا این کتاب حد الامکان خودخوان باشد.

فصل ۲ هندسه توسیع ریمانی با جزئیات بیشتر ارائه می‌دهد و مفاهیم مرتبط با فصل ۱ را تعمیم می‌دهد. توسیع ریمانی خانواده طبیعی از مثال‌ها و یک رابطه بین هندسه آفین و شبه ریمانی فراهم می‌آورد. مطالب مرتبط با متر توسیع‌های ریمانی با جزئیات بیشتر بیان شده‌اند. سپس توسیع‌های ریمانی برای مطالعه هندسه طیفی از تانسور انحنا‌ی ساختار آفین به کار گرفته شده‌اند و رویه‌های اوزرمن آفین و رویه‌های ایوانف-پترووای آفین مورد بررسی قرار گرفته‌اند. فصل ۲ با بیان مطالب مختصری از خواص ارتباط‌های آفین همگن به اتمام رسیده است. ارتباط‌های همگن رویه‌ای که دارای ارتباط لوی-سویتا از متر با انحنا‌ی ثابت نیست دو کلاس تشکیل می‌دهند که متمایز نیستند و اشتراک این دو کلاس غیر متری با استفاده از توسیع ریمانی مورد مطالعه قرار گرفته است.

فصل ۳ تعمیمی از توسیع‌های ریمانی را ارائه می‌دهد. در چنانچه توسیع‌های ریمانی برای ساختن مترهای خوددوگان ریچی تخت بکار می‌رود، اما توسیع‌های ریمانی تعدیل یافته منبعی از مترهای اینشتین-نا-ریچی تخت می‌باشند. در ادامه هندسه چهار بعدی با برخی جزئیات بیان شده است. نتایج جدید براساس تعمیم قضیه گلدبرگ-ساکس بکار گرفته شده است تا از این دیدگاه برخی نتایج شناخته شده قبلی از کلاس بندی مترهای اوزرمن ۴-بعدی نتیجه شود. در بررسی مترهای اوزرمن ۴-بعدی که عملگر ژاکوبی آنها دارای فرم نرمال جردن ناتبگون می‌باشد، فواید توسیع‌های ریمانی تعدیل یافته آشکارتر است. خمینه‌های فرا-کاهلر از انحنا‌ی مقطعی فرا-هولومورفیک ثابت نیز با این روش بررسی شده‌اند، هم‌چنان‌که مترهای اوزرمن مرتبه بالای متنوعی وجود دارند نشان داده

شده است که هر چنین خمینه‌ای موضعاً ایزومتر با متر توسیع ریمانی تعدیل یافته از یک خمینه آفین تخت می‌باشد. با بررسی ارتباط‌های اوزرن آفین غیر تخت، یک خانواده از مترهای فرا-کاهلری تعدیل یافته با طیف یکسان از عملگر ژاکوبی بدست می‌آید. این امر سبب تولید یک خانواده مفید از مترهای اوزرن می‌شود که عملگرهای ژاکوبی آن‌ها دارای فرم نرمال جردن غیر بدیهی باشند. خاصیت‌های مرتبط با اوزرن (شبه) فرا-مختلط بودن نیز بررسی شده و نشان داده شده است که هر توسیع ریمانی تعدیل یافته یک متر اوزرن شبه فرا-مختلط می‌باشد. اتحادهای انحنای که از ساختار تقریباً فرا-مختلط نتیجه می‌شوند دارای نقش اساسی می‌باشند، توجه کنید که در حالت کلی انحنا می‌تواند معنی فرا-هلمورفیک لزوماً انحنای را تعیین نمی‌کند.

فصل ۴ در مورد هندسه وایل (فرا)-کاهلری بحث می‌کند. هندسه وایل کلاسیک، در یک دیدگاه مشخص، یک میان راه بین هندسه ریمانی و آفین می‌باشد و هندسه وایل (فرا)-کاهلری خمینه‌ای است که از هندسه کاهلری است. نتایج در هر دو حالت مختلط و فرا-مختلط بیان شده‌اند. تمایز حالت ۴-بعدی در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرد زیرا هر ساختار وایل فرا-کاهلری در  $m \geq 6$  بدیهی می‌باشد. از طرفی اگر  $m = 4$  باشد، هر خمینه فرا-هرمیتی یا هر خمینه شبه-هرمیتی یک ساختار یکتای وایل فرا-کاهلری می‌پذیرد. تانسور ریچی متناوب  $\rho_a$  دارای اطلاعات اساسی در بررسی ساختار بعد ۴ هست. ساختار وایل (فرا)-کاهلری بدیهی است اگر و تنها اگر  $\rho_a = 0$  باشد. تمام امکان‌های جبری برای مقادیر ممکن از  $\rho_a$  قابل درک توسط ساختارهای چپ پایا روی گروه‌های لی ۴-بعدی از خمینه‌های هرمیتی یا خمینه‌های فرا-هرمیتی می‌باشند، خمینه‌های شبه-هرمیتی از علامت (۲، ۲) به خاطر روش کاملاً متمایز مورد بررسی قرار نگرفته است. این نتیجه برای بررسی فضای تانسورهای انحنا وایل (فرا)-کاهلری به عنوان مدول روی گروه‌های ساختاری مناسب بکار می‌رود و نشان می‌دهد هر حالت جبری از حالت هندسی قابل حصول می‌باشد.

ادواردو گارسیا ریو، پیتر گیلکی، استانا نیکوچویچ، رامون وازگوز لورنزو  
آوریل ۲۰۱۳

# فهرست مطالب

|    |                                                      |
|----|------------------------------------------------------|
| آ  | سخن‌ها                                               |
| ب  | پیشگفتار مترجم                                       |
| پ  | پیشگفتار مؤلفین                                      |
| ۱  | ۱ مفاهیم اساسی و مقدماتی                             |
| ۳  | ۱.۱ نظریه اساسی خمینه                                |
| ۱۳ | ۲.۱ ارتباط                                           |
| ۲۶ | ۳.۱ مدل‌های انحنایی در مجموعه‌های حقیقی              |
| ۲۷ | ۴.۱ هندسه کاهلر                                      |
| ۳۰ | ۵.۱ تجزیه‌های انحنایی                                |
| ۴۵ | ۶.۱ ساختارهای والکر                                  |
| ۵۱ | ۷.۱ مترها روی کلاف کتانزانت                          |
| ۵۶ | ۸.۱ مترهای والکر خوددوگان                            |
| ۶۱ | ۹.۱ انحنای بازگشتی                                   |
| ۶۲ | ۱۰.۱ انحنای ثابت                                     |
| ۷۷ | ۱۱.۱ هندسه طیفی از تانسور انحنای                     |
| ۸۳ | ۲ هندسه توسعه‌های ریمانی تغییر شکل یافته             |
| ۸۴ | ۱.۲ مفاهیم پایه                                      |
| ۹۱ | ۲.۲ مثال‌هایی از خمینه‌های ایوانف-پترووی اوزرمن آفین |

|     |                                             |     |
|-----|---------------------------------------------|-----|
| ۳.۲ | هندسه طیفی تانسور انحناى رویه‌های آفین      | ۹۴  |
| ۴.۲ | رویه‌های همگن آفین ۲- بعدی                  | ۹۸  |
| ۵.۲ | هندسه طیفی تانسور انحنا از توسیع‌های ریمانی | ۱۱۱ |

|     |                                                      |     |
|-----|------------------------------------------------------|-----|
| ۳   | هندسه توسیع‌های ریمانی تعدیل یافته                   | ۱۲۱ |
| ۱.۳ | مدل‌ها و خمینه‌های اوزرمن چهار بعدی                  | ۱۲۲ |
| ۲.۳ | خمینه‌های فراکاهلر از انحناى مقطعی فراهم‌مورفیک ثابت | ۱۳۶ |
| ۳.۳ | منترهای اوزرمن از بعد بالا                           | ۱۴۰ |
| ۱.۳ | منترهای اوزرمن با فرم نرمال جردن غیر بدیهی           | ۱۴۹ |
| ۵.۳ | ویفلدی اوزرمن (شبه) فرا-مختلط                        | ۱۵۹ |

|     |                                                    |     |
|-----|----------------------------------------------------|-----|
| ۴   | خمینه‌های واین فرا کاملری                          | ۱۶۵ |
| ۱.۴ | اصطلاحات نوشتاری                                   | ۱۶۶ |
| ۲.۴ | ساختارهای فرا-مختلط کاملر وایل اگر $m \geq 6$      | ۱۷۰ |
| ۳.۴ | ساختارهای فرا-مختلط کاملر وایل اگر $m = 4$         | ۱۷۵ |
| ۴.۴ | گروه‌های لی فرا-کاهلری وایل اگر $m = 4$            | ۱۸۴ |
| ۵.۴ | تانسورهای فرا-کاهلری وایل اگر $m = 4$              | ۱۹۲ |
| ۶.۴ | مفاهیم واقعی تانسورهای فرا-کاهلری وایل اگر $m = 4$ | ۱۹۴ |

|     |                            |
|-----|----------------------------|
| ۲۰۱ | کتاب نامه                  |
| ۲۱۹ | واژه‌نامه فارسی به انگلیسی |
| ۲۲۸ | نمایه                      |