

به نام یزدان پاک

بررسی زمینه‌های رشد استدلال جبری در
آموزش ریاضی مدرسه‌ای

احسان نادی ثانی

سرشناسه	: نادی ثانی، احسان، ۱۳۶۸ -
عنوان و نام پدیدآور	: بررسی زمینه‌های رشد استدلال جبری در آموزش ریاضی مدرسه‌ای / نویسنده احسان نادی ثانی.
مشخصات نشر	: سبزوار: بیهق، ۱۳۹۵.
مشخصات ظاهری	: ۱۲۰ ص.: مصور، جدول، نمودار.
شابک	: ۹۷۸-۹۶۴-۲۶۸۱-۶۸-۶
وضعیت فهرست نویسی	: فیپا
موضوع	: جبر - راهنمای آموزشی
موضوع	: Algebra-- Study and teaching
موضوع	: ریاضیات - ایران - راهنمای آموزشی - نمونه پژوهی
موضوع	: Mathematics -- Iran -- Study and teaching -- Case studies
رده بندی کنگره	: ۱۳۹۵ ب ۴ ن / ۱۵۷ QA
رده بندی دی‌سی	: ۵۱۲/۰۰۷
شماره کتابشناسی ملی	: ۴۲۶۹۶۶۴



عنوان: بررسی زمینه‌های رشد استدلال جبری در آموزش ریاضی مدرسه‌ای

مؤلف: احسان نادی ثانی

ناشر: انتشارات بیهق

طرح جلد:

صفحه آرای: دفتر پویش / انتشارات بیهق / ۹۱۵۵۷۱۴۷۳۷

چاپ و صحافی: ارم

شمارگان، قطع: ۱۰۰۰ نسخه، وزیری

تعداد صفحات، نوبت چاپ: ۱۲۰ صفحه، اول، تابستان ۱۳۹۵

شابک: ۹۷۸-۹۶۴-۲۶۸۱-۶۸-۶

قیمت: ۱۲۵۰۰ تومان

آدرس: سبزوار، انتشارات بیهق، ص. پ. ۵۷۶

تلفن: ۰۵۱-۴۴۴۱۳۹۹۹

Beyhagh.Nashr83@gmail.com

فهرست

۹	 مقدمه
۱۲	 آشنایی اجمالی با جبر و تاریخچه آن
۲۰	 استدلال جبری
۲۲	 تفکر جبری
۲۴	 مولفه‌های استدلال جبری
۲۹	 استدلال جبری در دوره ابتدایی
۳۶	 توصیف برنامه درسی جبر در جهان
۳۷	 توصیف تغییرات در برنامه درسی جبر در ایران
۳۸	 برنامه درسی چین و تایوان
۴۶	 توسعه احساس نمادین دانش‌آموزان
۵۰	 ادغام تفکر تابعی در برنامه درسی و آموزش
۵۳	 توسعه تفکر جبری در محتوای حساب
۵۵	 برگزاری آزمون جهت انجام پژوهش
۶۱	 ریاضی پایه اول دبستان
۶۳	 ریاضی پایه دوم دبستان
۶۷	 ریاضی پایه سوم دبستان
۷۱	 ریاضی پایه چهارم دبستان
۷۴	 ریاضی پایه پنجم دبستان
۷۹	 ریاضی پایه ششم دوره متوسطه اول
۸۰	 ریاضی پایه هفتم دوره متوسطه اول
۸۴	 ریاضی پایه هشتم دوره متوسطه اول
۸۷	 تجزیه و تحلیل داده‌ها
۱۱۴	 جمع‌بندی
۱۱۸	 بن مایه‌ها

بنده در طول هفت سال تدریس در دبیرستان‌های سطح کشور و به عنوان آموزشگر ریاضی، همواره دغدغه‌ام توجه به دو موضوع مهم آموزش و یادگیری ریاضی بوده است؛ برای پاسخگویی به دغدغه‌های پیش رو، پژوهش‌هایی را آغاز کرده‌ام. در این کتاب درصدد برآمدم که به بررسی زمینه‌های رشد استدلال جبری در آموزش ریاضی مدرسه‌ای بپردازم. به این منظور، ضمن تعریف استدلال جبری و بیان ویژگی‌های آن، مولفه‌های اصلی آن را که در پیشرفت و ارتقاء استدلال جبری موثرند، مورد مطالعه و تحلیل قرار گرفتم. در گام بعدی، چگونگی ورود به جبر در دو برنامه درسی چین و سنگاپور نیز مورد بررسی قرار دادم؛ سپس براساس مولفه‌های بیان شده، پرسش‌نامه‌ای تهیه گردید و میان تعداد ۸۶ دانش آموز از مدارس مختلف توزیع شد. یافته‌های بنده نشان می‌دهد که با اینکه گویا، زمینه‌سازی برای ورود به جبر در کتاب‌های درسی ایران صورت پذیرفته است؛ اما دانش‌آموزان، هنوز در گذار از حساب به جبر دچار مشکلات دیدید هستند؛ آن‌ها می‌توانند استدلال عددی کنند؛ ولی زمانی که این استدلال، صورت نمایی به خودش می‌گیرد، احساس ضعف و ناتوانی می‌کنند و نمی‌توانند پیوند مناسبی میان حساب و جبر برقرار کنند. در پایان از اساتید، همکاران و دوستانی که بنده را در تدوین و تألیف این کتاب یاری کردند، بهت تشکر را دارم. این کتاب را نخست به پدر و مادرم و سپس به همه هم‌میهنانم در سرزمین کهن ایران تقدیم می‌کنم و آرزوی توفیق روزافزون برای همه شما عزیزان را از خداوند متعال خواستارم.

احسان نادى ثانی

سیزوار - زمستان ۱۳۹۴

مقدمه:

آموزش جبر به عنوان بخشی مهم از آموزش ریاضیات، همواره مورد توجه اندیشمندان و بزرگان این رشته بوده است. در این میان توجه به جبر، آن هم به عنوان تعمیم حساب و نمایش نما این از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است. از قرن‌ها پیش، حساب را به عنوان پیش‌زمینه‌ای برای ورود به محاسبات می‌دانستند و اغلب این دو بخش به صورت جدا از هم آموزش داده می‌شد؛ به این صورت که مفاهیم جبری را پس از تدریس حساب و مفاهیم آن تدریس می‌کردند. با توجه به جایگاه جبر در رشد تفکر ریاضی، شکل‌گیری صحیح مفاهیم اولیه آن از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این میان، دانش‌آموزان زیادی در گذار از حساب به جبر نماندین دچار بحران و مشکلات ناشی از بی‌فهمی می‌شوند. هنگامی که دانش‌آموزان با نمادها روبرو می‌شوند، خود را در موضع ضعف می‌بینند و از ادای تفکر و استدلال جبری باز می‌مانند. در نگاه آنها، جبر موضوعی دیده می‌شود که به نواای بیش از حد طبیعی نیازمند است و کسی را یارای درک درست و منطقی آن نیست. این گروه همان دانش‌آموزانی هستند که به حساب عادت کرده‌اند و هیچ انگیزه‌ای برای یادگیری موضوعات پیشرفته جبری در خود نمی‌بینند. از این رو در امتحانات و ارزشیابی‌های ریاضی مدرسه‌ای افت پیدا کرده و حتی از ریاضیات دلسرد می‌شوند. بر این اساس باید نگاهی موشکافانه به برنامه درسی مرتبط با این موضوع داشت و راهکارهای مناسب را جهت گذار مناسب از حساب به جبر و رشد استدلال جبری در دانش‌آموزان اندیشید. لذا در این کتاب، قصد آن دارم تا زمینه‌های رشد استدلال جبری در آموزش ریاضی مدرسه‌ای را مورد بررسی قرار دهم.

هدف ریاضی تنها پرورش نخبه‌ها و علاقه‌مندان به ریاضی یا افراد خاصی که می‌خواهند رشته ریاضی را در سطح دانشگاهی ادامه دهند نیست، بلکه یکی از عمده‌ترین اهداف آموزش ریاضی، زمینه‌سازی رشد فکری دانش‌آموزان و در نهایت بهتر زندگی کردن آنها است. بر این اساس، برقراری ارتباط میان زندگی روزمره و ریاضی، کسب مهارت‌های مدل‌سازی و حل

مسئله، رشد مهارت‌های تفکر، برقراری پیوند میان نمایش‌های گوناگون ریاضی و تعبیر و تفسیر آنها، برقراری ارتباط بین ریاضی و علوم دیگر، به‌کارگیری مفاهیم ریاضی در محیط پیرامونی و تحلیل آنها، از جمله اهداف برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای است. برای درک مفاهیم ریاضی و مراحل اولیه آموزش آن‌ها، نباید دانش‌آموزان را وارد دنیاهای ذهنی کنیم، بلکه مفاهیم باید در پیوند با محیط پیرامونی طرح شوند تا دانش‌آموزان در مفاهیم ریاضی، معنایی مشخص و قابل درک پیدا کنند. در این میان آموزش جبر، به عنوان یکی از دستاوردهای باشکوه بشری از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. تجربه‌های تدریس نشان می‌دهد که دانش‌آموزان در عبور از حساب به جبر با مشکلات زیادی دست به گریبان هستند. ضعف در برنامه‌ریزی درسی آموزش ریاضی مدرسه‌ای، پرداختن دیر هنگام به مقوله جبر در پیدایش این مشکلات هم مزید بر علت است. ر.م. کپوت^۱ (۲۰۰۵)، نیز انجام داد مشخص شد که تعداد زیادی از دانش‌آموزان با مشکلات فراوان روبرو هستند.

کاپوت^۲ (۲۰۰۰، به نقل از اصغری، ۱۳۹۳) نیز اذعان داشت: "مشکلات عدیده‌ای که دانش‌آموزان طی سال‌های ابتدایی در درس جبر تجربه کرده‌اند، باعث دل‌زدگی و گریز آنها از ریاضی و گاه ترک تحصیل شده است." بلر^۳ (۲۰۰۳، ص ۱۶-۲۰)، معرفی تفکر جبری پیش از دبیرستان) در این زمینه گفته است: "در بسیاری از افراد، مطالعه جبر در حقیقت مرور خاطرات ناشی از استفاده از سه حرف آخر "بها" لاتین می‌باشد". بلر همچنین معتقد است که این دید ناشی از تجربیات مدرسه‌ای دانش‌آموزان در رابطه با موضوع جبر است؛ در حالی که بسیاری از مسائل جبری شامل x و y و z نمی‌شوند. نتایج حاکی از آن است که جبر یک موضوع در برنامه درسی است که تا پایان دوره متوسطه رایج است. دانش‌آموزان ملال‌آور بوده و مانع از این می‌شود که دانش‌آموزان بتوانند از تکالیف درسی لذت ببرند و علایق خود را توسعه دهند. چیزی که مشخص است این است که دانش‌آموزان، دانش تجزیه لازم برای درک جبری و همچنین مطالعه جبر را ندارند، به همین دلیل است که در انتقال بازنمایی‌های شفاهی و کلامی به صورت نمادین مشکل دارند. این موضوع، اهمیت جبر پیش از موعد^۴ را می‌رساند.^۵ بررسی تفکر و پیش‌دانسته‌های فراگیران و تجربیات ریاضی آنها می‌تواند به ما در یافتن علل این ضعف کمک کند و از آنجا که استدلال جبری به مثابه دریچه‌ای برای پیشرفت دانش‌آموزان

¹ Kieran² Kaput³ Blair⁴ Early Algebra

⁵ جنبش جبر پیش از موعد، حرکتی است که با هدف بازنگری در آموزش جبر شکل گرفت. هدف این جنبش، آموزش زود هنگام نمادهای جبری نیست، بلکه هدف آن، توجه به رشد جبر در دوران جنینی است؛ دورانی که جبر هنوز از حساب جدا نشده است، دورانی که تفکر جبری در دل حساب رشد می‌کند.

در جبر مدرسه‌ای می‌باشد، بنابراین مطالعه قدرت استدلال جبری فراگیران نیز می‌تواند به عنوان برجسته‌ترین عامل تاثیرگذار در فرآیند یادگیری مفاهیم جبری مورد توجه قرار گیرد. در استدلال جبری، استنباط عددی و جبری در ارتباط با هم مورد تاکید قرار می‌گیرند و از نگاه عددی و محاسباتی صرف پرهیز می‌شود. استدلال جبری در گستره ریاضیات نفوذ کرده است و روابط میان کمیت‌ها را توصیف می‌کند. استدلال جبری تمامی ساختمان تفکر ریاضی شامل حساب را منسجم می‌کند، زیرا استدلال جبری به ما فرصت کاوش و مطالعه ساختار ریاضی را می‌دهد. با توجه به آشکار شدن اهمیت رشد استدلال جبری در آموزش ریاضی مدرسه‌ای، سازمان‌های بین‌المللی نیز می‌کوشند تا با انجام تحقیقات مناسب، عوامل موثر بر گذار موفقیت‌آمیز از حساب به جبر را شناسایی نمایند و به کشورهای عضو، توصیه‌هایی را برای بهبود برنامه درسی آموزش ریاضی ارائه کنند.

ششمین ارزیابی ملی پیشرفت تحصیلی^۱ در آمریکا، که به وسیله شورای ملی معلمان ریاضی^۲ انجام شد، نیز نشان داد که دانش‌آموزان این کشور، قابلیت‌های جبر را در حد مطلوب در اختیار نداشته و اطلاع چندانی از مفاهیم زیربنایی آن ندارند. در این مطالعه، دانش‌آموزان پایه دوازدهم در حل داده‌تر: معادله‌ها و نامعادله‌ها و همچنین در انتقال از بازنمایی شفاهی به نمادین، با مشکل مواجه بودند.

با توجه به اینکه استدلال جبری، ابزاری به منظور تقویت تفکر جبری و نهایتاً جبر می‌باشد و چون کتاب درسی، وسیله اصلی تعامل و تربیت است که آموزگاران و دبیران در فعالیت‌های یاددهی و یادگیری به این ماده تکیه دارند، از این رو درصدد بررسی این عامل مهم در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای برآمدم.

همچنین اهمیت درس ریاضی در پرورش تفکر آینده تحصیلی و شغلی دانش‌آموزان و کمبود وجود پژوهش‌هایی در این حوزه نیز افزون بر علت شد تا با انگیزه‌ای قوی به مطالعه در این زمینه بپردازم.

با استناد به پژوهش‌های انجام شده و تلاش‌های میدانی که انجام گرفته است، روشن است که دانش‌آموزان در انتقال از حساب به جبر نمادین دارای مشکلات متعددی هستند. دانش‌آموزان در بیان صورت جبری عبارت‌های کلامی خود دچار ضعف هستند. عبارت‌های کلامی که در حقیقت می‌تواند تعمیمی از برقراری یک خاصیت باشد، بسیاری از کشورها، به‌ویژه از طریق مطالعات متعدد به ریشه‌یابی نتایج نامطلوب از درک جبری دانش‌آموزان در کلاس‌های خود پرداخته‌اند. در ایران نیز جای خالی چنین پژوهشی احساس می‌شود. امید است نتایج کتاب حاضر که سعی بر آن دارد که زمینه‌ها و بسترهای پیشرفت و توسعه استدلال جبری در آموزش

¹ National Assessment of Education Progress: NAEP

² National Council of Teachers of Mathematics: NCTM

ریاضی مدرسه‌ای را مورد توجه و بررسی قرار دهد، کمک موثری به مولفان کتاب‌های درسی برای اصلاح و تجدیدنظر در محتوای جبر مدرسه‌ای کتاب‌های درسی ریاضی کند و این امر سبب افزایش یادگیری، تعمیق مطلب و اثربخشی آموزشی در کتاب‌های درسی شود.

آشنایی اجمالی با جبر و تاریخچه آن:

خدیوجم (۱۳۶۲)، جبر را رشته وسیع و بسیار مهمی از ریاضیات معرفی می‌کند که موضوعش در مراحل مقدماتی شامل تعمیم خواص اعمال حساب به اعداد و تحقیق در روابط عمومی بین اعداد است که به وسیله استفاده از حروف به جای اعداد حاصل می‌شود و از فواید عمده آن تعیین مقادیر مجهول به وسیله حل معادلات است. او در ادامه، وجه تسمیه علم جبر را به ریاضیان ایرانی، محمد خوارزمی و کتابش حساب الجبر و المقابله می‌داند. (خدیوجم ۱۳۶۲ به نقل از رفیع پور، ۱۳۹۴).

گریگوری^۱ (۱۸۴۰ به نقل از اصغری، ۱۳۸۹) می‌نویسد، جبر در حال تبدیل شدن به دانشی بود که موضوع آن ترکیب عملیات است؛ در حالی که این عملیات با ماهیت خودشان یعنی آنچه هستند و یا آنچه می‌باشند که انجام می‌دهند، تعریف نشده‌اند؛ بلکه توسط قواعد ترکیبی که روی آنها اعمال می‌شود، تعریف شده‌اند. تمرکز در جبر، بر روی روابط بین کمیت‌ها (که ما آن را متغیر می‌نامیم) و توانایی ارائه نمادین آن روابط مختلف است. به عنوان مثال در رابطه $a+b=c$ سه مجهول وجود دارد که در تعیین خاصیت جمع‌پذیری را نشان می‌دهد. گروه مولفین انستیتوی ریاضی استکلوی شوروی (ترجمه شهریار، ی، ۱۳۷۹) اشاره می‌کنند که معنی و مفهوم جبر در طی زمان، دو بار دگرگون شده است، یک بار در نیمه نخست سده نوزدهم و بار دیگر در آغاز سده بیستم. بنابراین سه تعریف و تعبیر مختلف از جبر وجود دارد:

تعبیر نخست: جبر به عنوان علامت‌گذاری حرفی؛ که به آن دستکاری^۲ نیز می‌گویند؛

تعبیر دوم: جبر به عنوان نظریه معادله‌های جبری برای حل معادلات جبر؛

تعبیر سوم: جبر به معنای ابزاری برای بررسی دستگاه‌های مختلف معادلات^۳ به آن جبر اصول موضوعی یا جبر مجرد نیز می‌گویند.

بسته به اینکه در چه زمان و در چه زمینه‌ای صحبت می‌شود، ممکن است هر کدام از تعبیرهای فوق مدنظر باشد. (شهریاری به نقل از رفیع پور، ۱۳۹۴).

اما به طور مشخص، جبر در این نوشتار عبارت است از:

۱- جبر به عنوان زبان نمادین‌سازی؛

۲- جبر به عنوان ابزاری جهت حل مسائل؛

^۱ Grigori Perelman

۳- جبر به عنوان زبانی برای بیان خواص اعداد و عمومی سازی؛

۴- جبر به عنوان بخشی از برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای که برای همه دانش‌آموزان ارائه می‌شود. (محمدی و گویا، ۱۳۸۸ به نقل از استیسی^۱، چیک^۲ و کندال^۳ ۲۰۰۴)

بیشتر مردم وقتی که در مورد جبر می‌اندیشند، به فکر حل معادله‌ها می‌افتند؛ تجربه چندجمله‌ای‌ها، رسم توابع و سایر چیزهایی که مستلزم استفاده کردن از ایکس و وی در کلاس‌های درس ریاضی دبیرستانی هستند را به خاطر می‌آورند. (واگنر و پارکر^۴ ۱۹۹۳ به نقل از رفیع‌پور).

در بسیاری از کشورهای جهان، تعداد بیشتری از دانش‌آموزان در سطح دبیرستان آموزش می‌بینند و بخش مهمی از برنامه درسی ریاضی در دوره‌های عمومی و در همه کشورهای دنیا به فرآیند یاددهی - یادگیری جبر اختصاص یافته است. (استیسی، چیک و کندال ۲۰۰۴ به نقل از رفیع‌پور)

در جبر: ۱. شناسه‌ها و معادلات برای نشان دادن ارتباط بین مفاهیم جبری استفاده می‌کنند. برای بسیاری از افراد، مطالعه جبر، در حقیقت مرور خاطرات ناشی از استفاده از سه حرف آخر الفبای لاتین می‌باشد. (بر، ۲۰۰۳). بلر همچنین معتقد است که این دید ناشی از تجربیات مدرسه‌ای دانش‌آموزان در رابطه با موضوع جبر است؛ در حالی که بسیاری از مسائل جبری شامل x و y و z نمی‌باشد. دانش‌آموزانی که جبری می‌اندیشند، در حقیقت در برخورد با مسائل حسابی، در مرتبه بالاتر در سطح سوره ابتدایی قرار خواهند داشت و این مهم نیازمند تغییر زبان و توسیع مسائل حساب به فضایی برای تفکر جبری است. (یوسیسکین^۵، ۱۹۹۷). به علاوه، مطالعه و نمایش رابطه می‌تواند به معنای در شناخت جبر و حلای مسائل جبری داشته باشد. بنابراین بسیاری از موقعیت‌ها و رابطه‌ها باید به صورت جبری بیان شوند تا بتوان پاسخ مناسبی برای آن شرایط پیدا کرد. به عنوان مثال، نمونه زیر نیاز به نوشتن و تحلیل روابط موجود در مسئله دارد:

شروین سه سال از داریوش بزرگتر است و نگار پنج سال از داریوش کوچکتر است. اگر نگار بیست و یک سال داشته باشد، در شش سال آینده، شروین چند سال خواهد بود؟

¹ Stacey

² Chick

³ Kendal

⁴ Wagner and Parker

⁵ Blair

⁶ Usiskin