

# بسم الرحمن الرحيم

نقش مثال‌های نقض در درک بهتر مفاهیم ریاضی

مؤلفین: جواد شوهانی و مهدیار برفه‌ئی

سرشناسه: شوهانی، جواد، ۱۳۵۴ -

عنوان و نام پدیدآور: نقش مثال‌های نقض در درک بهتر مفاهیم ریاضی / مؤلفین جواد شوهانی، مهدیار برفه‌ئی.

مشخصات نشر: مشهد: امید مهر، ۱۳۹۴.

مشخصات ظاهری: ۷۶ ص.: مصور، نمودار (بخشی رنگی).

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۱۵۴-۲۷۱-۸

وضعیت فهرست نویسی: فیا

یادداشت: کتابنامه: ص. ۷۶.

موضوع: توابع --- مسائل، تمرین‌ها و غیره (متوسطه)

موضوع: توابع

شناسه افزوده: برفه‌ئی، مهدیار

رده بندی کنگره: ۱۳۹۴ ۷۱۳/۵۱۳۳۱

رده بندی دیویی: ۵۱۵/۰۷۶

شماره کتابشناسی ملی: ۳۹۹۵۶۹۱

## نقش مثال‌های نقض در درک بهتر مفاهیم ریاضی

ناشر: امیدمهر

مؤلفان: جواد شوهانی - مهدیار برفه‌ئی

نوبت چاپ: اول / ۱۳۹۴

شمارگان: ۱۰۰۰ جلد

چاپ و صحافی: کامیاب

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۱۵۴-۲۷۱-۸

قیمت: ۵۰۰۰۰ ریال

مشهد: انتشارات امیدمهر - صندوق پستی ۳۳۳/۹۱۷۷۵

تلفن: ۳۸۵۵۹۳۷۸، ۳۸۵۵۹۳۱۵ - ۰۵۱

## فهرست مندرجات

|                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| پیش گفتار .....                                                             | ۱  |
| فصل اول. تفکرات نادرست در مبحث توابع (Functions) .....                      | ۹  |
| فصل دوم. تفکرات نادرست در مبحث حدود توابع (Limits) .....                    | ۲۰ |
| فصل سوم. تفکرات نادرست در مبحث پیوستگی توابع (Continuity) .....             | ۲۷ |
| فصل چهارم. تفکرات نادرست در مبحث مشتق توابع (Differential Calculus) .....   | ۴۰ |
| فصل پنجم. تفکرات نادرست در مبحث انتگرالگیری توابع (Integral Calculus) ..... | ۶۶ |
| مراجع .....                                                                 | ۷۶ |

## پیش گفتار نویسندگان کتاب

گاهی اوقات برایمان پیش آمده است که با مطالعه مفاهیم ریاضی در کتابهای درسی دوره دبیرستان سؤالاتی همانند سؤالات زیر به ذهنمان خطور نموده باشد.

۱- اگر فرض یا فرضیاتی از صورت مسأله یا قضیه‌ای حذف شود چه اتفاقی می‌افتد، به

عبارت دیگر آیا با شرایط کمتر در فرض مسأله یا قضیه، می‌توان آنرا حل یا اثبات نمود؟

۲- چرا بعضی از مسائل یا قضایای ریاضی یک طرفه است و به صورت شرط لازم و کافی

بیان نمی‌گردد؟

۳- چرا عموماً در قضایای درس حساب دیفرانسیل و انتگرال، پیوستگی تابع  $y = f(x)$  را

بر بازه بسته  $[a, b]$  و مشتق پذیری تابع  $f(x)$  را بر بازه باز  $(a, b)$  فرض و تعریف

می‌کنیم.

و سؤالاتی از این قبیل...

متخصصان و دست اندرکاران مجرب در امر آموزش ریاضی بالأخص در مقطع دبیرستان بر این نکته اصرار می‌ورزند که هنر آوردن مثال نقض برای رد یک موضوع یا حدس ریاضی، رابطه مستقیمی با عمق فراگیری مطالب ریاضی در ذهن یک دانش آموز دارد بدین گونه دانش آموز در برخورد با مسائل دشوار و پیچیده ریاضی بهتر می‌تواند تبحر خود را نمایش دهد، از آنجا که مثال نقض ابزار مهمی در برقراری ایده‌های ناب ریاضی به شمار می‌آید که تاریخچه پیدایش آن در حدس‌ها و رد نمودن برخی از مسائل چالش بر انگیزی بوده که تفکر بشری را مدتهای مدیدی به خود مشغول کرده که بعضی از آنها در مدت کوتاه، بعضی دهها سال و گاهی اوقات قرن‌ها طول کشیده که حل گردند و تعدادی نیز تاکنون حل نشده باقی مانده‌اند، بهتر دیدیم در اینجا به شکلی اجمالی؛ به بررسی بعضی از مثال‌های نقض معروف در تاریخ ریاضیات پرداخته و مشاهده خواهیم کرد که این مفهوم بنیادی باعث چه تحول شگرفی در گسترش و تولید بعضی از رشته‌های کاربردی و علوم جدید در قرن حاضر شده است و این کمترین دلیل برای آن است که چنین مفهومی را در آموزش ریاضی مدارس جدی‌تر پیگیری نماییم.

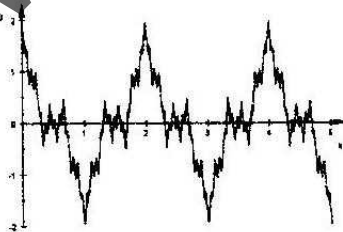
مثال اول. برای مدت مدیدی ریاضیدانان سعی در یافتن فرمولی برای تولید اعداد اول نمودند و به

نظر می‌رسید که فرمول اویلر ریاضیدان نامی سوئیسی یعنی  $P = 2^{2^n} + 1$  ( $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ )

اعداد اول را تولید می‌نماید (البته نه همه آنها را) ولی این فرمول برای  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  درست بود و بعدها در قرن بیستم میلادی و با پیدایش ابر کامپیوترها ثابت گردید که برای  $n = 5$  عدد  $p = 2^{2^5} + 1 = 641 \times 6700417$  بدست می‌آید که عددی مرکب است و حدس اوپلر غلط از آب در آمد. لازم به ذکر است با توجه به اینکه تعداد اعداد اول نامتناهی است، تلاش ریاضیدانها برای ارائه فرمولی که تمام اعداد اول را تولید کند تا امروز بی‌نتیجه مانده است.

**مثال دوم.** در قرن نوزدهم، ریاضیدان مشهور آلمانی کارل ویلهلم وایرشتراس مثالی را ارائه داد از تابعی که بر بازه  $(a, b)$  پیوسته و در هیچ نقطه‌ای بر بازه  $(a, b)$  مشتق پذیر نمی‌باشد و حدود یکصد سال بعد، نوربرت وینر ریاضیدان مشهور آمریکایی و بنیانگذار علم سیبرنتیک در کتاب مشهور خودش تحت عنوان من یک ریاضیدان هستم (ترجمه زنده یاد دکتر پرویز شهریاری)، نگاه موشکافانه‌ای به این نوع توابع می‌اندازد که در حرکت ذرات براونی در سیستم‌های کنترل و آشوبناک نقش حیاتی ایفا می‌نمایند که این نوع توابع اساس پیدایش فراکتالها و کاربرد وسیع آنها در علم گردیده است.

مثال وایرشتراس: تابع  $W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$  برای  $0 < a < 1$  و  $ab > 1$  و  $b > 1$  همه جا پیوسته و هیچ جا مشتق پذیر نیست.



شکلی از تابع وایرشتراس (تابعی حقیقی مقدار، همه جا پیوسته و هیچ جا مشتق پذیر)

**مثال سوم. (حدس گلدباخ):** هر عدد زوج بزرگتر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد

اول نوشت. به عنوان مثال  $12 = 7+5$ ,  $6 = 3+3$ ,  $20 = 13+7$ , ... در سال ۲۰۱۴ ابر کامپیوترها

توانستند تا عدد  $10^{18} \times 4$  پیش بروند و مشاهده گردید که این حدس تا عدد ذکر شده بالا درست می‌باشد. این حدس مربوط به ریاضیدان نامی آلمان کریستین گلدباخ است که در سال ۱۷۴۲ میلادی طی نامه‌ای به اوپلر آنرا مطرح نمود که یکی از قدیمی‌ترین مسائل حل نشده ریاضی در شاخه نظریه اعداد می‌باشد. لازم به ذکر است در سال ۲۰۰۰ میلادی، مؤسسه فابر، کتابی منتشر نمود که در آن علاوه بر آوردن تاریخچه‌ای از این حدس و ریاضیدانانی که روی آن کار نموده‌اند؛ مبلغ پاداشی معادل یک میلیون دلار برای هرکس که این حدس را اثبات یا رد نماید در نظر گرفته که تا حال حاضر بدون پاسخ باقی مانده است.

**مثال چهارم.** در سال ۱۶۳۷ میلادی ریاضیدان معروف فرانسوی پییر دو فرما، مسأله‌ای را در کتابش مطرح نمود که به آخرین قضیه فرما<sup>۲</sup> معروف گردید و در آنجا ادعا می‌نماید که آنرا حل نموده ولی به علت طولانی بودن راه حل و کمبود فضا در کتاب از آوردن جواب سرباز می‌زند<sup>۳</sup> البته بعدها مشخص گردید که حل موفقیت آمیز این مسأله که توسط ریاضیدان انگلیسی اندرو وایلز<sup>۴</sup> استاد دانشگاه کمبریج در دانشگاه پرینستون آمریکا در سال ۱۹۹۴ یعنی حدود ۳۵۷ سال بعد از آن انجام گرفت و در سال ۱۹۹۵ این اثبات طولانی، پیچیده، جذاب و بیش‌تره را در ۲۸۰ صفحه منتشر ساخت که در حل آن از ابزاری به نام نظریه جبری اعداد<sup>۵</sup> استفاده نموده که این ابزار در زمان فرما وجود نداشته و پیدایش این ابزار و نظریه برای اولین بار به قرن نوزدهم بر می‌گردد لذا بسیاری از بزرگان علم ریاضی اعتقاد دارند که فرما به جواب درست رسیده نه اینکه درست به جواب رسیده باشد!!!!.

<sup>۲</sup> Fermat's Last Theorem

<sup>۳</sup> راه اثبات حیرت انگیزی برای این قضیه دارم، حیف که جا نیست. (سخن دقیق فرما درباره قضیه)

<sup>۴</sup> Andrew Wiles

<sup>۵</sup> Algebraic Number Theory

صورت کلی این قضیه عبارت است از: هیچ سه عدد صحیح مثبتی مانند  $x, y, z$  برای هر عدد طبیعی  $n$  ( $n > 2$ ) در معادله  $x^n + y^n = z^n$  صدق نمایند.

**نکته.** فرما و اندرو وایلز هر دو این نتیجه را گرفتند که قضیه بالا، یک گزاره درست سه عددی با مشخصات فوق موجود نمی‌باشد.

بنابراین روش استفاده از مثال نقض، نقش مهمی در ریاضیات و سایر علوم کاربردی مهندسی (انسانی) ایفا می‌نماید و ابزار مؤثر و قدرتمندی برای دانش آموزان و دانشجویان و محققین در جهت تعمیق دانش خود و درک درست از مسائل پیچیده می‌باشد.

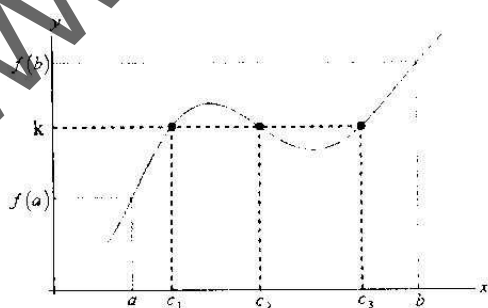
از طرفی قبل از اثبات یک گمان یا فرضیه، جستجوی یک مثال نقض ممکن و مناسب ارزشمند است، این امر موجب صرفه جویی زیادی در زمان، انرژی و تلاش افراد در سالهای اخیر در بسیاری از کشورهای پیشرفته و در حال توسعه، به خاطر استفاده از تکنولوژیهای مدرن، اجزاء رویکردهای مبتنی بر تدریس ریاضیات (تعریف، قضیه، برهان) دانش آموزان و دانشجویان (بالأخص مهندسی) تقریباً ناپدید شده است. دانشجویان تنها و محاسبه وابسته گردیده و در بسیاری از موارد فاقد تفکر عقلانی و درک صحیح از مسائل ریاضی می‌باشند. گاهی درسهای ریاضی بالأخص در سطح مدرسه و دانشگاه عمومی می‌گردد که از ذکر موارد خاص خودداری می‌شود و دانش آموزان و دانشجویان تنها با مثالهای مناسب و اعداد شسته رفته (به عنوان مثال اعداد طبیعی یا حداکثر اعداد صحیح) شوند که این امر درک نادرستی را در ذهن بوجود می‌آورد. هدف اصلی این کتاب، بازمی‌فرضیات دانش آموزان و دانشجویان در زمینه مسائل مختلف ریاضیات بالأخص توابع، مشتق و انتگرال که از مفاهیم اساسی درس حساب دیفرانسیل و انتگرال در دبیرستان عمومی یک دانشگاه است را شامل می‌گردد. ما در این کتاب تلاش نموده‌ایم به کمک بپردازیم که تا حدودی تضاد ذهنی دانش آموزان و دانشجویان را ترمیم نموده تا بتوانند در یک مسأله ریاضی با دیدی موشکافانه بپردازند و تلاش نمایند تفکر ریاضی خود را بسازند.

درک غلطی که گاهی در دانش آموزان سال آخر دبیرستان و دانشجویان سال اول و دوم دانشگاه از بعضی مفاهیم ریاضی بدست آمده از بین برود.

تجربه چندین ساله مؤلفین این کتاب در تدریس ریاضیات در مقاطع مختلف تحصیلی نشان می‌دهد که دانش آموزان و دانشجویان وقت زیادی روی فرضیات قضیه نمی‌گذارند و به راحتی از بعضی ویژگی‌های قضیه می‌گذرند. لذا خالی از لطف نخواهد بود به بیان دو مثال در جهت درک هرچه بیشتر مطالب بالا که به عنوان دو نمونه از کاربردهای قضیه مقدار میانی در امتحانات پایان ترم ریاضی (۱) رشته‌های مهندسی دانشگاه‌های معتبر داده شده است، بپردازیم. قبل از بیان دو نمونه انتخابی، خالی از لطف نخواهد بود که بعضی مقدمات لازم و ضروری را مجدداً در اینجا یادآوری نماییم.

### قضیه مقدار میانی<sup>۶</sup>

فرض کنید  $y = f(x)$  تابعی پیوسته بر بازه بسته  $[a, b]$  باشد و  $f(a) \neq f(b)$ ؛ در این صورت  $f(x)$  تمام مقادیر بین  $f(a)$  و  $f(b)$  را شامل می‌شود، به عبارت دیگر برای هر عدد حقیقی  $k$ ،  $f(a) < k < f(b)$  وجود دارد  $c$  ای در بازه باز  $(a, b)$  به قسمی که  $f(c) = k$ .



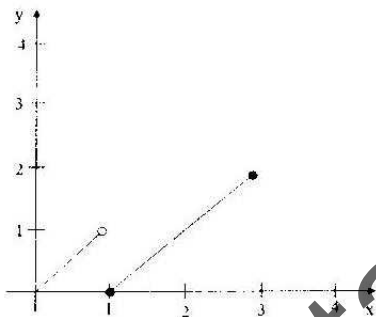
نکته. عکس قضیه بالا برقرار نیست.

حل. تابع روبرو را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} x & : 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & : 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

با توجه به شکل زیر:

واضح است  $f(x)$  تمام مقادیر بین  $f(0) = 0$  و  $f(3) = 2$  را در بر می گیرد در حالی که تابع  $f(x)$  در  $x = 1$  پیوسته نیست لذا  $f(x)$  در حالت کلی بر  $[0, 3]$  پیوسته نمی باشد.



نتیجه زیر از قضیه مقدار میانی که بیشتر جنبه کاربردی دارد و به قضیه بولتزانو<sup>v</sup> معروف است را در اینجا می آوریم.

**نتیجه.** اگر تابع  $y = f(x)$  بر بازه بسته  $[a, b]$  پیوسته باشد و  $f(a), f(b) < 0$  آنگاه **حداقل**  $c$  ای در بازه باز  $(a, b)$  وجود دارد به قسمی که  $f(c) = 0$ ؛ به بیان دیگر نمودار  $y = f(x)$  **حداقل** در یک نقطه محور  $x$ ها را قطع می کند یا به صورت واضح تر  $y = f(x)$  دارای **حداقل** یک ریشه مانند  $c$  در بازه  $(a, b)$  می باشد.

