

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تئزیه گروها

تالیف:

دکتر بیژن طائر

استاد دانشکده علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی اصفهان



مرکز انتشارات

جهاد دانشگاهی واحد صنعتی اصفهان

واحد صنعتی اصفهان

سرناسه	طائری، بیژن، ۱۳۴۰ -
عنوان و نام پدیدآور	نظریه گروه‌ها/ تألیف بیژن طائری.
مشخصات نشر	اصفهان: جهاد دانشگاهی، واحد صنعتی اصفهان، ۱۳۹۲.
مشخصات ظاهری	دوازده، ۳۰۸ ص.: مصور، جدول، نمودار.
شابک	۹۷۸-۶۰۰-۵۱۵۱-۵۰-۳
وضعیت فهرست نویسی	فیا
یادداشت	واژه‌نامه.
یادداشت	کتابنامه: ص. ۲۹۳.
یادداشت	نمایه.
موضوع	نظریه گروه‌ها -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	نظریه گروه‌ها -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
موضوع	جبر -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	جبر -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
شناخته‌شده افزوده	جهاد دانشگاهی، واحد صنعتی اصفهان
رده بندی کنگره	۱۳۹۲ ن ۶ ط ۲ / ۲ / ۴ Q۸۱۷۴
رده بندی دیسی	۵۱۲/۲۰۷۶
شماره کتابشناسی ملی	۳۱۶۰۲۳

نام کتاب	نظریه گروه‌ها
تألیف	دکتر بیژن طائری
ارزیاب علمی	دکتر عاطفه قربایی
ناشر	جهاد دانشگاهی، واحد صنعتی اصفهان - مرکز انتشارات
نوبت چاپ	اول
تاریخ نشر	۱۳۹۲
شمارگان	۵۰۰ جلد
تعداد صفحات	(۱۲+۳۰۸) ۳۲۰ صفحه
چاپ	پرتو
صحافی	سید
قیمت	۱۱۲۰۰۰ ریال
«تغییر قیمت کتاب در مجازة کمی ناشر، مجاز نمی‌باشد.»	

* صحت مطالب کتاب به عهده مؤلف بوده و ناشر مسئولیتی در این خصوص ندارد.	
* حق چاپ برای ناشر محفوظ است. تکثیر این کتاب یا بخشی از آن، هر شکل، شرعاً و قانوناً ممنوع بوده و دارای پیگرد قانونی است.	
* نشانی ناشر: اصفهان - دانشگاه صنعتی اصفهان - جهاد دانشگاهی - مرکز انتشارات - پلاک ۷ - تلفن: ۰۳۱۱-۳۹۱۲۷۱۱	
دورنگار: ۳۹۱۲۵۴۱	
فروشگاه: ۰۳۱۱-۳۹۱۲۵۹۴	

نشانی الکترونیکی:	sec.iut@acecr.ac.ir
درگاه:	www.jdiut.ac.ir
پست الکترونیک:	www.jdiut.ac.ir
مراکز پخش: ۱- کتابفروشی جهاد دانشگاهی (اصفهان - دانشگاه صنعتی اصفهان - تلفن: ۰۳۱۱-۳۹۱۲۵۹۴)	
۲- نمایشگاه کتاب جهاد دانشگاهی (تهران - خیابان انقلاب - بین خیابان فلسطین و چهارراه ولی عصر (عج) - تلفن: ۰۲۱-۶۶۰۶۶۰۱)	
نمایشگاه‌های فرهنگی ایران: ۳- علم‌گستر سیاهان (اصفهان - خیابان آماذگاه - کوچه فتح‌آباد - پلاک ۹۰ - تلفن: ۰۲۱-۶۶۰۶۶۰۱)	
۴- کتابپایان (تهران - میدان انقلاب - ابتدای خیابان آزادی - خیابان دکنر قریب - پلاک ۷ - تلفن: ۰۲۱-۶۶۰۶۶۰۱)	
شماره تماس برای خرید تلفنی کتاب از سراسر کشور: ۰۳۱۱-۳۹۱۲۵۹۴	

سخن ناشر

جای خرسندی و شکر بسیار است که در آستانه تابش پرنوهای حرکت بخش اسلام بر پهنه زمین، خود را در زمانی می یابیم که اندیشه اصلاح نه تنها عبث نیست که پیمودن راههای کمال و رشد در هر بعدی از ابعاد انسان سوارتر و شدنی تر می نماید. وظیفه آنان که در این دوره و در این بر زمین متوقف زندگی می کنند بس سنگین و دشوار است و بطور خاص مسئولان دانشگاه و دانشگاهیان در کنار حوزه های مقدس علمیه جایگاهی حساس و تعیین کننده در روند حرکت اجتماع دارد. تلاش پیگیر و همه جانبه برای بریدن بندهای بسته های جهاد مقدسی است که باید از دانشگاه و حوزه شروع شود و انتشار کتب علمی و علمی بر سری ما کوششی است در راستای آنچه ذکر آن رفت. بدیهی است این کوشش زمانی به نتایج مفید می رسد که بطور مداوم از سوی استادان، دانشگاهیان و اندیشمندان متعهد مورد انتقاد و پیشنهادات سازنده قرار گیرد.

اینک که چاپ اول این کتاب تقدیم دانشگاهیان ارجحید و مشتاق علم می گردد جای دارد از تمامی عزیزانی که در آماده سازی و تدوین آن تلاش نموده و زحمات زیادی را متحمل شده اند تشکر و قدردانی بعمل آید.

مرکز انتشارات جهاد دانشگاهی

واحد صنعتی اصفهان



دوره‌ی مولف:

دکتر آرش طائری از سال ۱۳۶۹ به عنوان عضو هیئت علمی دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان به تدریس و تحقیق اشتغال دارند. ایشان در حال حاضر حائز مقام استادی هستند. ایشان دوره‌های کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری ریاضی را در دانشگاه صنعتی اصفهان و دانشگاه اصفهان طی کرده‌اند. همچنین فرصت مطالعاتی تحقیقاتی حدود یکسال را نیز در دانشگاه استرالیای غربی سپری کرده‌اند. ایشان از ۴۰ عنوان درس در دوره‌های کارشناسی و تحصیلات تکمیلی ارائه کرده‌اند و راهنمایی حدود ۴۰ دانشجوی تحصیلات تکمیلی را به عهده داشته‌اند. بیش از ۶۰ مقاله‌ی پژوهشی در مجلات معتبر بین‌المللی به چاپ رسیده‌اند و چندین دوره به عنوان پژوهشگر برگزیده دانشگاه و استان و استاد نمونه دانشگاه انتخاب شده‌اند. چند کتاب نیز به شرح زیر تالیف یا ترجمه کرده‌اند:

- معادلات دیفرانسیل (همراه با آزمایشگاه‌های ممتیکا و میپل)، انتشارات جهاد دانشگاهی دانشگاه صنعتی اصفهان، کتاب برگزیده استان،
- ریاضیات مهندسی (آنالیز فوریه و معادلات با مشتقات جزئی) انتشارات جهاد دانشگاهی دانشگاه صنعتی اصفهان،
- مبانی جبر مجرد (همراه با آزمایشگاه‌های کامپیوتر)، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان، کتاب برگزیده‌ی دانشگاه تهران،
- ریاضی مهندسی (آنالیز فوریه، معادلات با مشتقات جزئی، تابع مختلط)، انتشارات جهاد دانشگاهی دانشگاه صنعتی اصفهان، کتاب برگزیده‌ی استان،
- آزمایشگاه‌های ریاضی عمومی، انتشارات جهاد دانشگاهی دانشگاه صنعتی اصفهان،
- ترجمه‌ی کتاب «کتاب درسی نظریه‌ی گراف»، انتشارات جهاد دانشگاهی دانشگاه صنعتی اصفهان، کتاب برگزیده برای رشته کامپیوتر دانشگاه‌های پیام نور،
- مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان، زیر چاپ

مقدمه

نظریه‌ی گروه‌ها از شاخه‌های قدیمی جبر است. علاوه بر جذابیت‌های نظری، کاربردهای بسیار متنوعی از نظریه‌ی گروه‌ها کشف شده است. هدف این کتاب معرفی و بسط مفاهیم اساسی نظری و مقدماتی از نظریه‌ی گروه‌ها است. در دوره‌ی کارشناسی ریاضی دانشجویان با اندکی از مفاهیم نظریه‌ی گروه‌ها آشنا شده و فن استدلال در این شاخه را تجربه می‌کنند. غالب مفاهیم معرفی شده در کتاب، برای هر شخص به بخشد در نظریه‌ی گروه‌ها مطالعه کند ضروری هستند. شاخه‌های متنوعی از نظریه‌ی گروه‌ها وجود دارند که در این کتاب سعی شده مفاهیم اصولی برخی از این شاخه‌ها از قبیل گروه‌های متناهی، گروه‌های نامتناهی، گروه‌های آبدی، ... آورده شوند.

کتاب مشتمل بر شش فصل است. فصل اول مفهوم گروه و خواص مقدماتی آن را بررسی شده‌اند. این فصل مفاهیم اساسی که در درس جبر دوره‌ی کارشناسی مطرح شده‌اند را به صورت گذرا معرفی می‌کند. در فصل دوم به صورت مفصل عمل گروه بر مجموعه و کاربردهای متنوع آن در قضایای سیلو، زیرگروه‌های هال، گروه‌های جایگشی، اعمال گروه و گروه‌های فروبنیوس بررسی شده‌اند. فصل سوم به معرفی برخی ضرب‌ها در گروه‌ها، مانند حاصل ضرب‌های مستقیم، نیم‌مستقیم، پیچشی و آزاد، و کاربرد آن‌ها اختصاص دارد. در فصل چهارم ساختار گروه‌های آبدی و مفاهیم مربوط به این گروه‌ها توصیف می‌شوند. فصل‌های پنجم و ششم به دردهای مهم از گروه‌ها موسوم به گروه‌های حل‌پذیر و گروه‌های پوچ‌توان اختصاص دارد معرفی می‌شود. فصل هفتم و هشتم، گروه‌های آبرحل‌پذیر و چنددوری، زیرگروه‌های فیتینگ و فراتینی، و برخی حقایق اساسی از p -گروه‌های متناهی نیز در این دو فصل انجام می‌شود.

کتاب برای طیف‌های متنوعی از دانشجویان می‌تواند استفاده شود. از دانشجویانی که آشنایی مقدماتی با مفاهیم اولیه‌ی جبر دارند تا دانشجویان تحصیلات تکمیلی می‌توانند از آن استفاده کنند. قضیه‌های و مثال‌های متنوع در طول درس برای فهم بهتر آورده شده‌اند. در انتهای اثبات قضایا یک مربع توپر آورده شده است. فهرست منابع کتاب، واژه‌نامه فارسی-انگلیسی و در نهایت نمایه‌ای شامل واژه‌های کلیدی به همراه شماره‌ی صفحه‌ی ظهور آن واژه، آورده شده است.

تمرین‌های متنوعی پس از هر بخش آورده شده است. حل تمرین‌ها باعث تسلط بیشتر بر درس خواهد شد. برخی خوانندگان برای حل تعدادی از تمرین‌ها نیاز دارند که به کتاب‌های ذکر شده در کتاب‌نامه در انتهای کتاب مراجعه نمایند. جستجو در بین این کتاب‌ها نیز برای تسلط بیشتر در درس ضروری است. ضمن این‌که حل و یا راهنمایی برای حل تعدادی از تمرین‌ها، هم‌چنین هر مطلب دیگر در مورد کتاب در آدرس اینترنتی <http://taeri.iut.ac.ir> قرار گرفته است و به روز نگه داشته خواهد شد. علاوه بر آن حل و یا راهنمایی برای حل برخی از تمرین‌ها در انتهای کتاب آورده شده است. به این امید که دانشجوی در درس تسلط بیشتری پیدا کند. البته باید دانشجو خود به حل تمرین‌ها مبادرت کرده و در صورت نیاز به آن بخش مراجعه نماید. بسیار امکان دارد که دانشجویان بتوانند حل‌های بسیار بهتر و ساده‌تر از تمرین‌ها بیابند.

از خوانندگان گرامی تقاضا دارم هر نکته در مورد کتاب را با اینجانب در میان بگذارند.

بیژن طائری

دانشکده علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی اصفهان

b.taeri@cc.iut.ac.ir

<http://taeri.iut.ac.ir>

فهرست مطالب

یک	مقدمه
سه	فهرست مطالب
پنج	فهرست نمادها
۱	۱ گروه و خواص نمادها
۲	۱.۱ گروه و زیرگروه
۷	۲.۱ مثال‌هایی از گروه‌ها
۱۲	۳.۱ گروه‌های دوری، گروه‌های منتهی‌تولد
۱۸	۴.۱ هم‌مجموعه‌ها
۲۱	۵.۱ زیرگروه‌های نرمال و گروه‌های خارج قیمتی
۲۵	۶.۱ هم‌ریختی
۳۴	۷.۱ گروه‌های آزاد و نمایش گروه‌ها
۴۹	۲ عمل گروه و کاربردهای آن
۵۰	۱.۲ گروه متقارن
۵۱	۲.۲ نمایش جایگشتی گروه
۵۹	۳.۲ عمل گروه به صورت مزدوجی
۶۷	۴.۲ عمل راست منظم گروه
۷۵	۵.۲ قضایای سیلو
۸۶	۶.۲ زیرگروه‌های هال
۹۷	۷.۲ گروه‌های جایگشتی
۱۰۲	۸.۲ عمل اولیه
۱۰۷	۹.۲ گروه فروبنیوس

۱۱۵	۳ ضرب گروه‌ها
۱۱۵	۱.۳ ضرب مستقیم گروه‌ها
۱۲۴	۲.۳ زیرگروه‌های نرمال می‌نیمال
۱۳۱	۳.۳ حاصل ضرب نیم‌مستقیم
۱۳۷	۴.۳ حاصل ضرب پیچشی
۱۴۲	۵.۳ حاصل ضرب آزاد

۱۴۷	۴ گروه‌های آبلی
۱۴۷	۱.۴ گروه‌های آبلی متناهی
۱۵۶	۲.۴ گروه‌های آبلی آزاد
۱۶۱	۳.۴ گروه‌های آبلی متناهیاً تولید شده
۱۶۳	۴.۴ گروه‌های تقسیم‌پذیر

۱۶۹	۵ گروه‌های حل‌پذیر و تعمیم آن‌ها
۱۷۰	۱.۵ گروه‌های حل‌پذیر
۱۸۴	۲.۵ سری‌های ترکیبی و $\mathcal{A}$
۱۹۲	۳.۵ گروه‌های چند دوری و ابرحل‌پذیر

۱۹۹	۶ گروه‌های پوچ‌توان
۲۰۰	۱.۶ سری‌های مرکزی
۲۱۲	۲.۶ زیرگروه‌های فیتینگ و فراتینی
۲۱۸	۳.۶ p -گروه‌های متناهی
۲۲۶	۴.۶ تعمیم قضایای هال، گروه‌های p -پوچ‌توان
۲۳۷	۵.۶ گروه‌های پوچ‌توان متناهیاً تولید شده

۲۴۳	پاسخ تمرین‌های برگزیده
۲۹۳	کتاب‌نامه
۲۹۵	منابعی برای مطالعه‌ی بیشتر
۲۹۹	واژه‌نامه فارسی انگلیسی
۳۰۵	نمایه

فهرست نمادها

اولین صفحه مراجعه

نماد	مفهوم	اولین صفحه مراجعه
$f : A \rightarrow B$	تابی از A به B	۲
$\mathbb{Z}$	مجموعه اعداد صحیح	۴
$\mathbb{Q}$	مجموعه اعداد گویا	۴
$\mathbb{R}$	مجموعه اعداد حقیقی	۴
$\mathbb{C}$	مجموعه اعداد مختلط	۴
C_n	گروه ضربی ریشه‌های n ام واحد	۴
C^*	گروه ضربی اعداد مختلط ناصفر	۴
C_{p^∞}	گروه شبه دوری	۴
$C_G(x)$	مرکز ساز x در G	۵
$C_G(U)$	مرکز ساز U در G	۵
$Z(G)$	مرکز G	۵
XY	حاصل ضرب دو مجموعه	۵
$ g $	مرتبه g	۶
G^*	گروه اعضای وارون‌پذیر مونوئید G	۷
$H \times K$	ضرب مستقیم دو گروه	۸
V_4	چهار گروه کلاین	۸
Q_8	گروه چهارگان	۹
$S_X, \text{sym}(X)$	گروه جایگشت‌ها روی مجموعه‌ی X	۹
D_{2n}	گروه دووجهی از مرتبه‌ی $2n$	۱۰

۱۰	گروه دووجهی نامتناهی	D_∞
۱۱	مجموعه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های در حلقه‌ی R	$M_n(R)$
۱۱	گروه خطی عمومی از درجه‌ی n	$GL_n(R)$
۱۱	گروه خطی خاص از درجه‌ی n	$SL_n(R)$
۱۱	گروه خطی عمومی از درجه‌ی n روی میدان q عضوی	$GL_n(q)$
۱۱	مجموعه‌ی تبدیل‌های خطی روی فضای برداری V	$\text{Hom}(V, V)$
۱۱	گروه خطی عمومی	$GL(V)$
۱۲	گروه تولید شده توسط X	$\langle X \rangle$
۱۵	بستار نرمال X در G	X^G
۱۵	جابجاگر دو عضو	$\langle x, y \rangle$
۱۵	جابجاگر دو زیرگروه	$[H, K]$
۱۵	زیرگروه مشتق	G'
۱۸	هم‌بمجموعه‌ی راست	Hg
۱۸	هم‌بمجموعه‌ی چپ	gH
۱۸	شاخص H در G	$ G : H $
۲۲	زیرگروه H نرمال است	$H \trianglelefteq G$
۲۲	زیرگروه سری H در G نرمال است	$H \triangleleft G$
۲۲	مزدوج x توسط g	$x^g = g^{-1}xg$
۲۲	مزدوج H توسط g	$H^g = g^{-1}Hg$
۲۲	نرمال‌ساز H در G	$N_G(H)$
۲۲	گروه خارج قسمتی	G/H
۲۳	گروه رده‌های مانده‌ای به پیمانه‌ی n	$\mathbb{Z}_n$
۲۳	گروه شبه دوری	$\mathbb{Z}_{p^\infty}$
۲۳	دو گروه یکریخت هستند	$G \cong H$
۲۷	درون ریختی‌های گروه G	$\text{End } G$
۲۷	گروه خودریختی‌های G	$\text{Aut } G$
۲۸	تصویر وارون U تحت φ	$U\varphi^{-1}$
۲۸	هسته‌ی φ	$\ker \varphi$
۲۸	تصویر K تحت φ	$K\varphi$

۲۹	خودریختی داخلی القا شده توسط g	τ_g
۲۹	گروه خودریختی‌های داخلی G	$\text{Inn } G$
۳۰	گروه خطی خاص تصویری از درجه‌ی n	$\text{PSL}_n(R)$
۴۷	زیرگروه H در G مشخصه است	$H \text{ char } G$
۴۷	گروه کواترنیون تعمیم یافته	Q_{2^n}
۵۳	مدار x در G	$\text{orb}(x), \text{or}_G(x)$
۵۴	ثابت‌ساز x در G	$\text{stab}(x), G_x$
۵۵	اعضایی که مدارشان تک‌عضوی است	$\text{Fix}_X(G), \text{Fix}(G)$
۷۶	مجموعه‌ی p -زیرگروه‌های سیلوی G	$\text{Syl}_p(G)$
۸۴	گروه تولید شده توسط همه‌ی π -زیرگروه‌های نرمال G	$O_\pi(G)$
۱۱۶	ضرب مستقیم گروه‌ها	$\prod_{i=1}^n G_i$
۱۲۰	ضرب دکارتی گروه‌ها	$\prod_{i \in I} G_i$
۱۲۱	ضرب مستقیم گروه‌ها	$\text{Dr}_{i \in I} G_i$
۱۲۱	جمع مستقیم گروه‌های معنی	$\oplus_{i \in I} G_i$
۱۳۱	ضرب نیم مستقیم H توسط K	$G = H \rtimes K$
۱۳۳	ضرب نیم مستقیم H توسط K نسبت به عمل φ	$H \rtimes_\varphi K$
۱۳۷	مجموعه‌ی همه‌ی توابع از X به G	G^X
۱۳۸	مجموعه‌ی همه‌ی توابع از X به G با تکیه‌گاه متناهی	$G^{(X)}$
۱۳۹	حاصل ضرب پیچشی غیر محدود G توسط H	$G \text{ Wr}(X) H$
۱۳۹	حاصل ضرب پیچشی محدود G توسط H	$G \text{ wr}(X) H$
۱۳۹	حاصل ضرب پیچشی استاندارد G توسط H	$G \wr H$
۱۴۱	حاصل ضرب آزاد گروه‌ها	$\text{Fr}_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$
۱۴۷	زیرگروه H در G زیرنرمال است	$H \trianglelefteq G$
۱۸۸	طول ترکیبی G	$\ell(G)$
۲۰۰	جمله‌ی n ام سری مرکزی پایینی	$\Gamma_n(G)$
۲۰۴	جمله‌ی $(n+1)$ ام سری مرکزی بالایی	$Z_n(G)$
۲۱۲	زیرگروه فیتینگ	$F(G)$
۲۱۴	زیرگروه فراتینگی	$\Phi(G)$