

عناصر انگل و گروهها

مؤلفان:

حجت رستمی و سید ابراهیمی

بهار ۱۳۹۴

www.ketab.ir

سرشناسه	: رستمی، حجت، ۱۳۵۹-
عنوان و نام پدیدآور	: عناصر انگل در گروه‌ها
مشخصات نشر	: زنجان: قلم مهر، ۱۳۹۴.
مشخصات ظاهری	: ۹۶ص.
شابک	: ۱۰۰۰۰۰ ریال: ۱-۲۱-۷۴۷۴-۶۰۰-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی	: فبیای مختصر
یادداشت	: فهرستنویسی کامل این اثر در نشانی: http://opac.nlai.ir قابل دسترسی است.
شناسه افزوده	: ابراهیمی، سمیه، ۱۳۶۰-
شماره کتابشناسی ملی	: ۳۷۸۰۳۴۲



انتشارات قلم مهر

www.tabassom.org

عنوان کتاب: عناصر انگل در گروه‌ها

مؤلفان: حجت رستمی - سمیه ابراهیمی

ناشر: انتشارات قلم مهر

شابک: ۱-۲۱-۷۴۷۴-۶۰۰-۹۷۸

نوبت چاپ: اول ۱۳۹۴

شمارگان: ۱۰۰۰ نسخه

چاپ و صحافی: پیشگام

قیمت: ۱۰۰۰۰ تومان

فرض کنید G یک گروه و n یک عدد صحیح نا منفی باشد. برای هر دو عنصر a, b از G ، $[a, n, b]$ یعنی جابجاگر n -انگل^۱ (a, b) را به شکل استقرایی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[a, n, b] := a, [a, b] = [a, 1, b] := a^{-1}b^{-1}ab$$

و برای همه $n > 0$

$$[a, n, b] = [[a, n-1, b], b]$$

عنصری نظیر $g \in G$ را یک عنصر انگل راست G گویند، اگر برای هر x در G عدد صحیح مثبت $n = n(g, x)$ وجود داشته باشد به طوری که $[g, n, x] = 1$. باید توجه داشت که در اینجا عنصر متغیر x در طرف راست ظاهر می‌شود. اگر n به طور مستقل از x انتخاب شود، آنگاه g را یک عنصر n -انگل راست G می‌خوانند. یا با کمی اغماض، به آن یک عنصر انگل راست کراندار^۲ G می‌گویند. مجموعه همه عناصر n -انگل راست G را با نماد $R_n(G)$ نمایش می‌دهند. مجموعه عناصر انگل راست و راست کراندار G به ترتیب به صورت $R(G)$ و $\bar{R}(G)$ نمایش داده می‌شوند.

عناصر انگل چپ n -انگل چپ G به طور مشابه تعریف می‌شوند. یعنی $g \in G$ را یک عنصر انگل چپ G نامند، هرگاه برای هر عضو $x \in G$ عدد صحیح $n = n(g, x) \geq 0$ وجود داشته باشد به طوری که: $[x, n, g] = 1$. در اینجا متغیر x در چپ ظاهر می‌شود. اگر n ، به طور مستقل از x انتخاب شود، آنگاه g را یک عنصر n -انگل چپ گویند؛ یا به طور ساده، آن را یک عنصر انگل چپ کراندار G نامند. مجموعه عناصر n -انگل چپ G را با نماد $L_n(G)$ نمایش می‌دهند. مجموعه عناصر انگل با نماد $L(G)$ و عناصر انگل چپ کراندار G به صورت $\bar{L}(G)$ نمایش داده می‌شوند.

می‌توان از گروه انگل و n -انگل نیز سخن گفت؛ و در واقع آن‌ها را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

اگر G یک گروه باشد، آنگاه عبارت‌های $R(G) = G$ و $G = L(G)$ معادلند؛ هرگروه با این خاصیت را گروه انگل نامند. گروه n -انگل، گروهی است که برای هر $a, b \in G$ داریم: $[a, n, b] = 1$. بنابراین هر عنصر از یک گروه n -انگل همزمان یک عنصر n -انگل راست و چپ است.

بنابراین، این سخن که g یک عنصر 1 -انگل چپ یا 1 -انگل راست است، با این جمله که g در داخل مرکز G قرار دارد یکسان است. به همین صورت G یک گروه 1 -انگل است اگر و فقط اگر آبدلی باشد.

در نیم قرن اخیر، فعالیت‌های وسیعی در زمینه عناصر و گروه‌های انگل صورت گرفته است. در این کتاب، سعی

^۱Engle

^۲Bounded Engel

می‌شود به گروه‌های انگل و عناصر انگل، هر چند اجمالی پرداخته شود.

سرچشمه نظریه انگل را می‌توان در ابتدای قرن بیستم و در مقالات برنساید^۳ جستجو کرد. در واقع، این موضوع با مسائل برنساید پیوند نزدیکی دارد. مبداء شناخته شده این نظریه، مقاله‌ای از برنساید است که در سال ۱۹۰۱ ارائه شد و در آن مسائلی که به مسائل برنساید معروف گردید، برای اولین بار مطرح شد [۱۲]. بخصوص او پرسید، آیا هرگروه متاهی مولد از نمای^۴ کراندار، متاهی است! برنساید ثابت کرد که این امر برای گروه‌های با نمای ۳ برقرار است، و مشاهده نمود که این گروه‌ها دارای این ویژگی هستند که مزدوج‌های a, a^b برای هر دو عنصر a, b از یک گروه با هم جابجا می‌شوند. می‌توان به طور خلاصه این مطلب را بررسی کرد:

فرض کنیم $a, b \in G$. در این صورت، با توجه به فرض می‌دانیم که $b^2 = 1$ ، لذا $b^2 a^b a^b a = (ba)^2 = 1$. که نشان می‌دهد:

$$a^b a^b a = 1. \quad (1)$$

با جایگذاری b^2 ، به جای b در (۱)، به دست می‌آید:

$$a^b a^b a = 1. \quad (2)$$

از (۱) و (۲)، معلوم می‌شود که a, a^b جابجا می‌شوند، یا به طور معادل a و a^{-1} جابجا می‌گردند. پس هر گروه از نمای ۳ در برابری ۲- انگل صدق می‌کند؛ یعنی:

$$[[y, x], x] = 1.$$

یک سال بعد از مقاله [۱۲]، برنساید مقاله دیگری نوشت و این بحث را در آن دنبال کرد [۴]. این مقاله توجه چندانی جلب نکرد، اما از آن بعنوان اولین مقاله‌ای می‌توان نام برد که در زمینه گروه‌های انگل به نگارش در آمده است. در این مقاله، برنساید ثابت کرد که هر گروه ۲- انگل در قانون‌های زیر صدق می‌کند:

$$[x, y, z] = [y, z, x] \quad (3)$$

$$[x, y, z]^3 = 1. \quad (4)$$

بخصوص هر گروه ۲- انگل که دارای عنصری از مرتبه ۳ نباشد، پوچتوان است. هر چند که او در حالت کلی نتوانست نشان دهد که این گروه‌ها، پوچتوان از رده حداکثر ۳ هستند.^۵ با این حال او توانست ثابت کند که هر گروه ۲- انگل تابدار^۶، موضوعاً پوچتوان است.

^۳Burnside

^۴Exponent

^۶Tortion

^۵برای دیدن اثبات این مطلب به بخش ۴.۳ رجوع شود.

به نظر، نخستین بار این هاپکینز^۷ بود که نشان داد، برای هر گروه ۲- انگل رابطه

$$[x, y, z, t] = 1, \text{ برقرار است}^8. \text{ او همچنین نشان داد که روابط (۳) و (۴)، گروههای ۲- انگل را رده‌بندی می‌کنند.}$$

اگر از کارهای برنساید و هاپکینز روی گروههای ۲- انگل بگذریم، نخستین نتیجه کلی و شناخته شده در زمینه گروههای انگل قضیه زرن^{۱۰} است، که در سال ۱۹۳۶ ارائه شد و درحقیقت برگردان قضیه انگل در جبر لی است. این قضیه بیان می‌دارد، که هر گروه انگل متناهی، پوچتوان است. لذا شرط انگل، یک شرط تعمیم یافته پوچتوانی است. با این حال می‌توان مثالهایی یافت که نشان دهد در حالت کلی، گروههای انگل ممکن است پوچتوان نباشند.^{۱۱}

در سال ۱۹۴۲، لوی^{۱۲} ثابت کرد، که یک گروه G ، ۲- انگل است اگر و فقط اگر بستار نرمال $\mathfrak{F}(G)$ از یک عنصر دلخواه، آبدی باشد. بعلاوه هر گروه ۲- انگل، پوچتوان از رده حداکثر ۳ است. لوی این نتایج را در تلاش برای یافتن پاسخ دو سوال زیر به دست آورد:

۱. آیا هر گروه n - انگل بی‌تاب، پوچتوان است؟

۲. آیا هر گروه n - انگل، موضعاً پوچتوان است؟

پاسخ به این دو سوال برای گروههای ۳- انگل، ساده نبود. اما هاینکن^{۱۳} در سال ۱۹۶۱، تحت شرایطی به هر دو سوال پاسخ مثبت داد. او ثابت کرد، که هر گروه ۳- انگل G ، در صورت نداشتن عنصر مرتبه ۲ یا ۵، پوچتوان از رده حداکثر ۴ است. بعلاوه ۲- گروهها و ۵- گروههای ۳- انگلی موجودند، که پوچتوان نیستند.

در سال ۱۹۶۰ هاینکن برای عناصر انگل ثابت کرد، در هر گروه G معکوس یک عنصر انگل راست، عنصر انگل چپ است و معکوس یک عنصر n - انگل راست، یک عنصر $(n+1)$ - انگل چپ است^{۱۴}. بنابراین

$$\bar{R}(G)^{-1} \subseteq \bar{L}(G) \text{ و } R(G)^{-1} \subseteq L(G).$$

در سال ۱۹۷۲ ال کاپه^{۱۵} و دبلیوکاپه^{۱۶} قضیه‌ای ساختاری، مشابه آنچه لوی برای گروههای ۲- انگل صورت داده بود، برای گروههای ۳- انگل ارائه دادند.^{۱۷} در دهه اخیر نتایج زیادی در نظریه انگل به دست آمده است. از جمله تراستاسون^{۱۸} در سال ۲۰۰۵ ثابت کرد:

با فرض اینکه G یک گروه ۴- انگل موضعاً پوچتوان است، اگر G یک p - گروه باشد که $p \neq 2, 3, 5$ ، آنگاه G پوچتوان از رده حداکثر ۷ است و اگر یک ۵- گروه باشد، آنگاه هر زیر گروه ۳- مولدی آن از رده حداکثر ۶ است.^{۱۹}

^۷Hopkins

^۸به مرجع [۹] رجوع شود.

^۹Characterize

^{۱۰}Zorn

^{۱۱}به مرجع [۶] و [۷] رجوع شود.

^{۱۲}Levi

^{۱۳}Heineken

^{۱۴}برای دیدن اثبات این مطلب به بخش ۱.۳ رجوع شود.

^{۱۵}I. Kappe

^{۱۶}W. Kappe

^{۱۷}به مرجع [۷] رجوع شود.

^{۱۸}Traustason

^{۱۹}به مرجع [۸] رجوع شود.

در سال ۲۰۱۰، قضایای زیر را ثابت کرد:

فرض کنید G یک گروه و p عددی اول باشد. اگر $x \in L_p(G)$ و برای عدد صحیح $1 < n$ ، $x^{p^n} = 1$ ، آنگاه $\langle x^p \rangle^G$ ، حل پذیر از طول مشتق حداکثر $n-1$ است و x^p به $B(G)$ ، رادیکال بئر G تعلق دارد. بخصوص، $x^p \in HPG(G)$ ، که $HP(G)$ رادیکال هرش - پلاتکین G است.^{۲۰}

فرض کنید G یک گروه و $a, b \in L_p(G)$. آنگاه $\langle a, b \rangle$ پوچتوان از رده حداکثر ۴ می باشد.^{۲۱}

فرض کنید G یک گروه باشد. اگر $a \in G$ از مرتبه متناهی باشد، که مرتبه اش بوسیله ۲ یا ۳ عاد نشود و $b^{\pm 1} \in R_p(G)$ ، آنگاه $\langle a, a^b \rangle$ پوچتوان از رده پوچتوانی حداکثر ۴ است.^{۲۲}

بعدا عبداللهی و خسروی نتایج زیر را نیز ارائه دادند:

فرض کنیم G یک گروه باشد و $a^{\pm 1} \in L_p(G)$ در این صورت $\langle a, a^b \rangle$ پوچتوان از رده حداکثر ۴ برای هر $b \in G$ می باشد.^{۲۳}

فرض کنیم G یک گروه باشد و $a^{11} \in L_p(G)$ یک p -عصر برای عدد اول p باشد؛ در این صورت:

الف) اگر $p=2$ آنگاه $a^4 \in B(G)$ ؛

ب) اگر p یک عدد اول فرد باشد، آنگاه $a^{2p} \in B(G)$.^{۲۴}

این قضایا به ترتیب در فصل های ۳ و ۴، مورد بررسی قرار می گیرند. در فصل یک، تعاریف و قضایایی که در طول متن، مورد نیاز است آورده شده است. فصل دو، به بررسی گروههای موضعاً پوچتوان، اختصاص یافته است. بخش اول از این فصل، به معرفی گروههای پوچتوان با ارائه مثال و بیان برخی خواص اساسی از این گروهها می پردازد. در بخش دوم، زیرگروههای صعودی مورد بحث و بررسی قرار می گیرند. بخش سوم به شرط نرمال ساز و رابطه آن با گروههای موضعاً پوچتوان، اختصاص یافته است. در بخش آخر از این فصل، گروههای ابرمرکزی معرفی و ارتباط آن با گروههای موضعاً پوچتوان بحث می شود. در فصل سوم، عناصر انگل تعریف شده و قضایا و نتایج مرتبط با آنها آورده می شود. در این فصل، گروههای انگل نیز مورد توجه است. از جمله گروههای ۲- انگل، مورد بررسی قرار می گیرد و بخش آخر از این فصل، به عناصر ۳- انگل اختصاص یافته است. فصل چهار، به مطالعه عناصر ۴- انگل راست و چپ اختصاص دارد.

^{۲۰} برای دیدن اثبات قضیه به بخش ۵.۳ رجوع شود.

^{۲۱} برای دیدن اثبات قضیه به بخش ۵.۳ رجوع شود.

^{۲۲} برای دیدن اثبات قضیه به فصل ۴ رجوع شود.

^{۲۳} برای دیدن اثبات قضیه به فصل ۴ رجوع شود.

^{۲۴} برای دیدن اثبات قضیه به فصل ۴ رجوع شود.

فهرست مطالب

ت	پیشگفتار
خ	فهرست مطالب
۱	۱ تعاریف و مقدمات
۶	۱.۱ گروه‌های پوچتوان و حل پذیر
۱۱	۲ گروه‌های موضعاً پوچتوان
۱۱	۱.۲ گروه‌های موضعاً پوچتوان
۱۷	۲.۲ زیرگروه‌های صعودی
۲۳	۳.۲ شرط نرمال‌ساز
۲۵	۴.۲ گروه‌های ابرمرکزی
۲۷	۵.۲ نمودار رده‌های گروهی
۲۹	۳ عناصر انگل و گروه‌های انگل
۲۹	۱.۳ عناصر انگل
۳۴	۲.۳ گروه‌های انگل
۳۴	۳.۳ انگل و حلپذیری
۳۶	۴.۳ گروه‌های ۲ - انگل
۴۱	۵.۳ عناصر ۳ - انگل چپ در گروه‌ها
۵۱	۴ عناصر ۴ - انگل
۵۲	۱.۴ عناصر ۴ - انگل راست
۶۵	۲.۴ عناصر ۴ - انگل چپ

۷۳	۵ عناصر n - انگل راست برای $n \geq 5$
۷۳	۱.۵ عناصر ۵- انگل
۸۱	۲.۵ مجموعه ها و زیرگروههای انگل
۸۳	کتابنامه

www.ketab.ir