

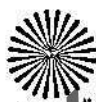
مبانی ترکیبیات

(رشته ریاضی)

www.ketab.ir

دکتر شهریار فرهمندراد

سرشناسه	:	فرهمناد، شهریار، ۱۳۳۷-
عنوان و نام پدید آور	:	مبانی ترکیبیات/ شهریار فرهمناد.
مشخصات نشر	:	تهران: دانشگاه پیام نور، ۱۳۹۳.
مشخصات ظاهری	:	چهارده، ۲۳۷ ص: مصور، جدول، نمودار.
فروست	:	دانشگاه پیام نور، ۲۱۲۳. گروه ریاضی: ۱/۳۱
شابک	:	4 - 0170 - 14 - 964 - 978
وضعیت فهرست نویسی	:	فپا.
یادداشت	:	کتابنامه.
موضوع	:	آنالیز ترکیبی.
شناسه افزوده	:	دانشگاه پیام نور
رده بندی کنگره	:	QA۱۶۴/ف۴م۲ ۱۳۹۳
رده بندی دیویی	:	۵۱۱/۶
شماره کتابسناسی ملی	:	۳۷۰۷۶۰۱



مبانی ترکیبیات

مؤلف: دکتر شهریار فرهمناد

ویراستار علمی: دکتر مصطفی شمسی

تهیه و تولید: مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: مرکز چاپ و انتشارات دانشگاه پیام نور

شمارگان: ۲۰۰۰ نسخه

نوبت و تاریخ چاپ: چاپ اول اسفند ۱۳۹۳

شابک: ۴ - ۰۱۷۰ - ۱۴ - ۹۶۴ - ۹۷۸

ISBN: 978 - 964 - 14 - 0170 - 4

فروش این کتاب فقط از طریق نمایندگی های دانشگاه پیام نور مجاز می باشد و فروش

آن در سایر مراکز فروش کتاب موجب تعقیب قانونی فروشنده خواهد گردید

(کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر محفوظ و متعلق به دانشگاه پیام نور است. تولید، کپی یا خلاصه برداری، نشر و ترجمه، چاپ، افست، توزیع گسترده، تهیه CD و ... این اثر یا بخشی از آن اعم از متن، طرح پشت و روی جلد و ... بدون اخذ مجوز کتبی از مرکز چاپ و توزیع دانشگاه خلاف مقررات و تعرض به حقوق مادی و معنوی دانشگاه است. متخلفین وفق قانون حمایت از مولفان و مصنفان و هنرمندان دارای مسئولیت حقوقی و کیفری بوده و تحت پیگرد قرار می گیرند.)

قیمت: ۸۸۰۰۰ ریال

امروزه کتاب‌خوانی و علم‌آموزی، نه تنها یک وظیفه‌ی ملی، که یک واجب دینی است.

مقام معظم رهبری

در عصر حاضر یکی از شاخصه‌های ارزیابی رشد، توسعه و پیشرفت فرهنگی هر کشوری میزان تولید کتاب، مطالعه و کتاب‌خوانی مردم آن مرز و بوم است. ایران اسلامی نیز از دیرباز تاکنون با داشتن تمدنی چندهزارساله و مراکز متعدد علمی، فرهنگی، کتابخانه‌های معتبر، علما و دانشمندان بزرگ با آثار ارزشمند تاریخی، سرآمد دولت‌ها و ملت‌های دیگر بوده و در عرصه‌ی فرهنگ و تمدن جهانی به‌سان خورشیدی تابناک همچنان می‌درخشد و با فرزندان نیک‌نهاد خویش هنرمایی می‌کند. چه کسی است که در دنیا با دانشمندان فرزانه و نام‌آور ایرانی همچون ابوعلی سینا، ابوریحان بیرونی، فارابی، خوارزمی و ... همچنین شاعران برجسته‌ای نظیر فردوسی، سعدی، مولوی، حافظ و ... آشنا نباشد و در مقابل عظمت آنها سر تعظیم فرود نیاورد. تمامی این افتخارات ارزشمند، برگرفته از میزان عشق و علاقه فراوان ملت ما به فراگیری علم و دانش از طریق خواندن و مطالعه منابع و کتاب‌های گوناگون است. به شکرانه‌ی الهی، تاریخ و گذشته ما، همیشه درخشان و پربار است. ولی اکنون در این زمینه در چه جایگاهی قرار داریم؟ آمار و ارقام ارائه‌شده از سوی مجامع و سازمان‌های فرهنگی در مورد سرانه‌ی مطالعه‌ی هر ایرانی، برایمان چندان امیدوارکننده نمی‌باشد و رهبر معظم انقلاب اسلامی نیز از این وضعیت بارها اظهار گله و ناهشودگی نموده‌اند.

کتاب، دروازه‌ای به سوی گستره‌ی دانش و معرفت است و کتاب خوب، یکی از بهترین ابزارهای کمال بشری است. همه‌ی دستاوردهای بشر در سراسر عمر جهان، تا آنجا که قابل کتابت بوده است، در میان دست‌نوشته‌هایی است که انسان‌ها پدید آورده و می‌آورند. در این مجموعه‌ی بی‌نظیر، تعالیم الهی، درس‌های پیامبران به بشر، و همچنین علوم مختلفی است که سعادت بشر بدون آگاهی از آنها امکان‌پذیر نیست. کسی که با دنیای زیبا و زندگی‌بخش کتاب ارتباط ندارد بی‌شک از مهم‌ترین دستاورد انسانی و نیز از بیشترین معارف الهی و بشری محروم است. با این دیدگاه، به‌روشنی می‌توان ارزش و مفهوم رمزی عمیق در این حقیقت تاریخی را دریافت که اولین خطاب خداوند متعال به پیامبر گرامی اسلام (ص) این است که «بخوان!» و در اولین

سوره‌ای که بر آن فرستاده‌ی عظیم‌الشان خداوند، فرود آمده، نام «قلم» به تجلیل یاد شده‌است: «اقْرَأْ وَ رَبُّكَ الْأَكْرَمُ. الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ» در اهمیت عنصر کتاب برای تکامل جامعه‌ی انسانی، همین بس که تمامی ادیان آسمانی و رجال بزرگ تاریخ بشری، از طریق کتاب جاودانه مانده‌اند.

دانشگاه پیام‌نور با گستره‌ی جغرافیایی ایران‌شمول خود با هدف آموزش برای همه، همه‌جا و همه‌وقت، به‌عنوان دانشگاهی کتاب‌محور در نظام آموزش عالی کشورمان، افتخار دارد جایگاه اندیشه‌سازی و خردورزی بخش عظیمی از جوانان جویای علم این مرز و بوم باشد. تلاش فراوانی در ایام طولانی فعالیت این دانشگاه انجام پذیرفته تا با بهره‌گیری از تجربه‌های گرانقدر استادان و صاحب‌نظران برجسته کشورمان، کتاب‌ها و منابع آموزشی درسی شاخص و خودآموز تولید شود. در آینده هم، این مهم با هدف ارتقای سطح علمی، روزآمدی و توجه بیشتر به نیازهای مخاطبان دانشگاه پیام‌نور با جدیت ادامه خواهد داشت. به‌طور قطع استفاده از نظرات استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان محترم، ما را در انجام این وظیفه‌ی مهم و خطیر یاری‌رسان خواهد بود. پیشاپیش از تمامی عربوانی که با نقد، تصحیح و پیشنهادهای خود ما را در انجام این وظیفه‌ی خطیر یاری می‌رسانند، سپاسگزاری می‌نماییم. لازم است از تمامی اندیشمندانی که تاکنون دانشگاه پیام‌نور را منزلت‌گاه اندیشه‌سازی خود دانسته و ما را در تولید کتاب و محتوای آموزشی درسی یاری نموده‌اند، صمیمانه قدردانی گردد. موفقیت و بهروزی تمامی دانشجویان و دانش‌پژوهان عزیز آرزوی همیشگی ما است.

دانشگاه پیام‌نور

فهرست مطالب کتاب

یازده	مقدمه
۱	فصل اول: دوره‌ی سریع مفاهیم مجموعه‌ها و منطق گزاره‌ها
۱	هدف کلی
۱	هدف‌های یادگیری
۱	۱-۱ بشماریم
۲	۲-۱ مجموعه‌ها
۸	۳-۱ رشته‌ها
۹	۴-۱ تابع
۱۰	۵-۱ مختصری از منطق ریاضی و استدلال
۱۳	۶-۱ الگوریتم و مدل‌سازی
۱۷	فصل دوم: جبر بول
۱۷	هدف کلی
۱۷	هدف‌های یادگیری
۱۹	۱-۲ مثال
۱۹	۲-۲ مثال
۲۰	۳-۲ مثال
۲۰	۴-۲ دوگان
۲۰	۵-۲ قوانین جبر بول
۲۱	۶-۲ قضیه
۲۲	۷-۲ تمرین
۲۲	۸-۲ یادآوری رابطه‌ها
۳۰	۹-۲ جبرهای بول به‌عنوان شبکه‌ها
۳۶	۱۰-۲ نمایش اعضای جبر بول

۴۳	فصل سوم: شمارش
۴۳	هدف کلی
۴۳	هدف‌های یادگیری
۴۴	۱-۳ مفاهیم اصلی
۴۶	۲-۳ نماد فاکتوریل
۴۶	۳-۳ تبدیل و جایگشت
۴۸	۴-۳ تبدیل n شیء با تکرار (جایگشت n شیء با تکرار)
۵۰	۵-۳ ترتیب
۵۳	۶-۳ ترکیب
۶۲	۷-۳ دوجمله‌ای نیوتن
۷۴	۸-۳ جایگشت‌های حلقه‌ای
۷۷	۹-۳ دامه‌ی بسط دوجمله‌ای و تعمیم آن
۸۰	۱۰-۳ معادله‌های خطی با ضریب واحد
۸۳	۱۱-۳ ترکیب‌های با تکرار
۸۹	۱۲-۳ بعضی از اعداد خاص
۹۲	۱۳-۳ اعداد استوانیک نوع اول
۹۵	۱۴-۳ اعداد استوانیک نوع دوم
۹۹	۱۵-۳ اعداد بل
۱۰۱	۱۶-۳ افزازهای مرتب اعداد طبیعی
۱۰۳	۱۷-۳ مسئله‌ی توزیع (نتیجه)
۱۰۵	۱۸-۳ اصل غربال یا اصل شمول و طرد (= عدم شمول، استثنا، حذف و...)
۱۰۹	۱۹-۳ قضیه‌ی شمول و طرد در حالت کلی
۱۱۹	۲۱-۳ اصل لانه کبوتری

۱۲۵	فصل چهارم: روابط بازگشتی
۱۲۵	هدف کلی
۱۲۵	هدف‌های یادگیری
۱۲۶	۱-۴ تعریف رابطه‌ی بازگشتی
۱۲۸	۲-۴ تشکیل رابطه‌ی بازگشتی
۱۳۰	۳-۴ روش‌های حل روابط بازگشتی خطی همگن
۱۳۸	۴-۴ روابط بازگشتی خطی غیرهمگن
۱۴۱	۵-۴ روابط بازگشتی غیرخطی با ضرایب غیرثابت

۱۴۵	فصل پنجم: توابع مولد
۱۴۵	هدف کلی
۱۴۵	هدف‌های یادگیری
۱۴۸	۱-۵ مثال
۱۴۸	۲-۵ مثال
۱۴۹	۳-۵ تعریف تابع مولد

۱۴۹	۴-۵ تذکر
۱۴۹	۵-۵ تذکر
۱۴۹	۶-۵ مثال
۱۴۹	۷-۵ مثال
۱۵۰	۸-۵ تذکر
۱۵۰	۹-۵ مثال
۱۵۰	۱۰-۵ مثال
۱۵۰	۱۱-۵ مثال
۱۵۲	۱۲-۵ مثال
۱۵۲	۱۳-۵ قضیه
۱۵۳	۱۴-۵ مثال
۱۵۵	۱۵-۵ ساخت انواع مولد جدید
۱۵۸	۱۶-۵ توابع مولد نمایی
۱۶۲	۱۷-۵ روابط بازگشتی و تابع مولد
۱۶۷	فصل ششم: نظریه‌ی گراف
۱۶۷	هدف کلی
۱۶۷	هدف‌های یادگیری
۱۶۹	۱-۶ تعریف گراف
۱۷۰	۲-۶ تعریف طوقه
۱۷۰	۳-۶ گراف ساده
۱۷۲	۴-۶ تعریف زیرگراف
۱۷۲	۵-۶ گراف جهت‌دار
۱۷۲	۶-۶ گراف مکمل
۱۷۳	۷-۶ مرتبه‌ی گراف
۱۷۳	۸-۶ اندازه‌ی گراف
۱۷۳	۹-۶ درجه یک رأس
۱۷۴	۱۰-۶ قضیه
۱۷۵	۱۱-۶ ماکزیمم و مینیموم درجه
۱۷۷	۱۲-۶ برابری گراف‌ها
۱۷۸	۱۳-۶ گراف‌های یک‌ریخت
۱۸۲	۱۴-۶ گراف بازه‌ای
۱۸۴	۱۵-۶ دنباله گرافیکی
۱۹۰	۱۶-۶ گراف منتظم
۱۹۲	۱۷-۶ گراف کامل
۱۹۳	۱۸-۶ گشت، گذر، مسیر
۱۹۴	۱۹-۶ نکته

۱۹۴	۲۰-۶ قضیه
۱۹۸	۲۱-۶ گراف همبند
۲۰۲	۲۲-۶ فاصله بین دو رأس
۲۰۳	۲۳-۶ تعریف خروج از مرکز، قطر و شعاع
۲۰۵	۲۴-۶ مؤلفه گراف
۲۱۳	۲۵-۶ گراف اوپلری
۲۱۸	۲۶-۶ گراف‌های دوبخشی
۲۲۳	۲۷-۶ دو مسئله‌ی باز (حل نشده)
۲۲۵	۲۸-۶ درجه ورودی و درجه خروجی در گراف‌های جهت‌دار
۲۲۶	۲۹-۶ تورنمنت
۲۲۹	۳۰-۶ تعریف
۲۳۱	۳۱-۶ گراف هامیلتونی
۲۴۰	۳۱-۶ درخت
۲۵۰	۳۳-۶ گراف‌ها و ماتریس آنها
۲۵۵	۳۴-۶ تطابق‌های کامل و ماکسیمال
۲۶۴	۳۵-۶ رنگ‌آمیزی گراف‌ها و چندجمله‌ای رنگی
۲۷۲	۳۶-۶ عدد رنگی پالی

فصل هفتم: ماتریس‌ها و انواع مهم آنها از لحاظ ترکیباتی

۲۷۵	هدف کلی
۲۷۵	هدف‌های یادگیری
۲۷۶	۱-۷ مثال
۲۷۷	۲-۷ تعریف
۲۷۸	۳-۷ مثال
۲۷۸	۴-۷ قضیه
۲۷۹	۵-۷ قضیه
۲۸۰	۶-۷ مثال
۲۸۰	۷-۷ تمرین
۲۸۱	۸-۷ توان‌های ماتریس‌ها
۲۸۲	۹-۷ تمرین
۲۸۲	۱۰-۷ مثال
۲۸۲	۱۱-۷ قضیه
۲۸۳	۱۲-۷ مثال
۲۸۴	۱۳-۷ مثال
۲۸۴	۱۴-۷ مثال
۲۸۵	۱۵-۷ ماتریس‌های دوری
۲۸۷	۱۶-۷ ماتریس‌های (۱, ۰)
۲۸۸	۱۷-۷ ماتریس‌های آدامار
۲۹۰	۱۸-۷ دترمینان

فصل هشتم: مربع‌های لاتین و لاتین متعامد

۲۹۹

هدف کلی

۲۹۹

هدف‌های یادگیری

۲۹۹

۱-۸ مربع‌های وفقی (یا جادویی)

۲۹۹

۲-۸ مثال

۳۰۰

۳-۸ تمرین

۳۰۱

۴-۸ مسئله‌ی باز

۳۰۱

۵-۸ مثال

۳۰۱

۶-۸ روش ساختن مربع‌های وفقی $n \times n$ با n فرد (روش ترانس)

۳۰۱

۷-۸ روش ساده برای ساختن مربع‌های وفقی 4×4

۳۰۲

۸-۸ ساختن بعضی از مربع‌های وفقی مرتبه‌ی زوج

۳۰۲

۹-۸ مربع‌های لاتین

۳۰۴

۱۰-۸ مربع‌های لاتین استاندارد

۳۰۴

۱۱-۸ تلفیق مربع‌های لاتین

۳۰۵

۱۲-۸ مربع‌های لاتین متعامد

۳۰۶

۱۳-۸ قضیه هال: (قضیه ازدواج)

۳۱۳

۱۴-۸ صورت مجموعه‌ای قضیه‌ی هال

۳۱۳

۱۵-۸ روش ساختن مربع‌های وفقی از روی مربع‌های لاتین

۳۱۸

فصل نهم: مقدمه‌ای بر طرح‌ها و صفحات تصویری

۳۲۳

هدف کلی

۳۲۳

هدف‌های یادگیری

۳۲۳

۱-۹ مثال

۳۲۴

۲-۹ تعریف

۳۲۴

۳-۹ قضیه

۳۲۵

۴-۹ تذکر

۳۲۶

۵-۹ مثال

۳۲۶

۶-۹ تعریف

۳۲۷

۷-۹ نمایش ماتریسی طرح‌های بلوکی

۳۲۹

۸-۹ قضیه (نامساوی فیشر)

۳۳۱

۹-۹ تذکر

۳۳۲

۱۰-۹ طرح‌های متمم

۳۳۳

۱۱-۹ صفحات تصویری متناهی

۳۳۴

۳۳۷

منابع

مقدمه

در شاخه‌های مختلف ریاضیات، به بررسی مسائلی شامل ترکیب‌های مختلف حروف، اعداد و اشیاء می‌پردازیم. اعداد مشخصی که در ریختن دو مکعب به‌دست می‌آید، محصولات مختلفی که در مورچه‌ها کثمت و برداشت می‌شود و درس‌های مختلفی که در ساعت‌ها و روزهای هفته توسط مسئول آموزش یک دانشکده پخش می‌شود همه مواردی شامل همین ترکیب‌ها و حالت‌های مختلف هستند.

شاخه‌ای از ریاضیات که ترکیب‌ها، اعداد و حالات قرار گرفتن اشیاء مختلف را مطالعه و بررسی می‌کند ترکیبیات نامیده می‌شود. ♦
از شاخه‌های ترکیبیات که هم اکنون بسیار فعال و رو به گسترش است نظریه‌ی گراف می‌باشد.
به‌طور کلی ترکیبیات و مسائل آن شامل چند بخش عمده است:

۱. مسئله‌ی وجودی

در این بحث وجود مسئله مورد بررسی قرار می‌گیرد. به‌طور مثال آیا مثلثی با مساحت $S \in \mathbb{N}$ و طول اضلاع گویا وجود دارد؟ یا نتایجی وجودی مانند قضایای هال و رمزی.

۲. مسئله‌ی شمردن

شاید بتوان گفت مهم‌ترین بحث ترکیبیات شمارش می‌باشد و به دو شکل مهم صورت می‌گیرد:

الف) تشکیل فهرست همه حالات ممکن (که در مسائل بزرگ عملی نیست)،
ب) شمردن بدون شمردن (یعنی با روش‌هایی نظیر برقرار تناظری یک به یک
بین مسئله و مسئله‌ی دیگری با جواب معلوم و یا افزای مسئله به مسئله‌های کوچک‌تر).
این بخش شامل مباحثی نظیر توابع مولد، انعکاس و حساب تفاضلات متناهی
است.

۳. بهینه‌سازی و بهینه‌یابی

منظور بهینه مسائل گسسته است. به‌طور مثال بهینه‌یابی در مسئله‌ی زمانبندی و شبکه‌ها
و شامل راه‌حل‌هایی مانند شاخه، کران و روش‌های ابتکاری.

۴. تئوری مرتبه

بخش تئوری مرتبه خود از مجموعه‌های جم متناهی و شبکه‌ها و ماتروئیدها تشکیل
می‌گردد.

۵. پیکربندی‌ها

شامل طرح‌ها، گروه‌های جایگشت و تئوری کدگذاری

بسیاری فکر می‌کنند اولین و شاید تنها درس دانشگاهی حساب دیفرانسیل و
انتگرال است! هر چند این صحیح است که حوزه بسیار مهم ریاضیات که ابزاری مهم
در توفیق کاربرد ریاضی است، حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌باشد؛ ولی حساب
دیفرانسیل و انتگرال یا آنالیز ریاضی درسی تکنیکی است و انسان نیاز به سال‌ها مطالعه
دارد تا بتواند در روش‌های کاربردی‌اش ماهر شود.

اگر شما بخواهید یک ریاضیدان یا دانشمند کامپیوتر شوید توسعه تفکر بالا
الزامی است. مفاهیمی وجود دارند که در آنها روش‌های ریاضی مفیدند و ریاضیدان‌ها
روی آنها کار می‌کنند و البته در حوزه‌های دیگر فکری نیز مطرح می‌شوند.

پژوهش‌های موفقیت‌آمیزی در ریاضیات کاربردی خارج از حوزه حساب
دیفرانسیل و انتگرال وجود دارند. یکی از مهم‌ترین آنها فعالیت‌های اخیر و جالبی است
که در رمز صورت می‌گیرد به‌علاوه می‌توانیم از برنامه‌ریزی خطی، تئوری کدگذاری و

نظریه محاسبات هم نام ببریم. ریاضیات کاربردی در این حوزه‌ها به‌طور عام ریاضیات گسسته نامیده می‌شود. بنا نداریم در این کتاب «ریاضیات گسسته» را به‌طور عمیق پوشش دهیم، بلکه مطابق سرفصل‌های مصوب، تعدادی از نتایج و روش‌های ترکیبیات، نظریه گراف و هندسه‌ی ترکیبیاتی را بررسی خواهیم نمود. پس از هر مطلب درسی و تعاریف و قضایا، با مثال‌های ساده شروع کرده و هدف از آن آموزش و ارائه تجزیه و تحلیل‌های لازم می‌باشد. سپس مسئله‌های پیچیده‌تری مطرح می‌شوند. کتاب سرشار از مثال‌ها و تمرین‌های مختلف است و مطالعه و دست و پنجه نرم کردن با آن‌ها به‌همه‌ی دانشجویان محترم توصیه می‌گردد. گاهی قضیه‌ای تحت عنوان مثال یا تمرین گفته شده تا حوصله خواننده از خواندن و کارکرد پی‌درپی قضایا سر نرود و علاوه بر آن خود شاید راه حلی ارائه دهد که با برهان اصلی قضیه اختلاف آشکاری داشته باشد. بی‌شک ریاضیات با ایده‌های نو و مسائل حل نشده هنری پویا است.