



درسی در نظریهٔ گروه‌ها

جان اس. رز

ترجمه

دکتر علیرضا مقدم‌فر، دکتر اکبر حسنی، دکتر علیرضا زکایی



A Course on Group Theory
John S. Rose
Cambridge University Press, 1994

درسی در نظریه گروهها
تألیف جان اس. رز
ترجمه دکتر علیرضا مقدم فر، دکتر اکبر حسنی، دکتر علیرضا زکایی
ویراسته دکتر محمدهادی شفیعیها
طراح جلد: سمیه عابدینی
نسخه پرداز: احمد میهن جامه
حروفچین: صدیقه مسعودی، مینا مهرابی فرد
ناظر چاپ: جواد خسروی
مرکز نشر دانشگاهی
چاپ اول ۱۳۸۵
تعداد ۱۵۰۰
لیتوگرافی: عابد
چاپ: نماد
حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

سرشناسه: رز، جان، ۱۹۳۸ - Rose, John S. م.
عنوان و پدیدآور: درسی در نظریه گروهها/جان اس. رز؛ ترجمه علیرضا مقدم فر، اکبر حسنی، علیرضا زکایی.
مشخصات نشر: تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۵.
مشخصات ظاهری: ۴۷۲ ص.
فهرست: مرکز نشر دانشگاهی؛ ۱۲۶۲. ریاضی، آمار، و رایانه، ۱۵۲
شابک: 964-01-1262-3
یادداشت: فیا
یادداشت: عنوان اصلی: A course on group theory, 1994
یادداشت: کتاب حاضر اولین بار تحت عنوان «مقدمه‌ای بر نظریه گروه در سال ۱۳۸۰ با ترجمه فرهاد محمدی، حسین شمسعلی، علیرضا خاکباز» توسط انتشارات دانشجو منتشر شده است.
یادداشت: کتابنامه ص. ۴۵۶-۴۶۱.
یادداشت: نمایه.
عنوان دیگر: مقدمه‌ای بر نظریه گروه.
موضوع: نظریه گروهها.
شناسه افزوده: مقدم فر، علیرضا ، مترجم.
شناسه افزوده: حسنی، اکبر ، مترجم.
شناسه افزوده: زکایی، علیرضا ، مترجم.
شناسه افزوده: مرکز نشر دانشگاهی.
رده‌بندی کنگره: QA۱۷۲/۲/۲۷ ۱۳۸۵
رده‌بندی دیویی: ۵۱۲/۲
شماره کتابخانه ملی: ۴۲۲۸۵-۸۵

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه	عنوان
۷	پیشگفتار
۱۳	۵. بعضی قراردادها و نکات اساسی
۲۰	۱. مقدمه‌ای بر نظریهٔ گروه‌های متناهی
۲۸	۲. مثالهایی از گروه‌ها و هم‌ریختیها
۶۴	۳. زیرگروه‌های نرمال، هم‌ریختیها و خارج‌قسمتها
۱۱۴	۴. عملهای گروهی بر مجموعه‌ها
۱۴۴	۵. p -گروه‌های متناهی و قضیهٔ سیلو
۱۷۷	۶. گروه‌های زوج مرتبه
۱۹۱	۷. سریها
۲۵۷	۸. حاصلضربهای مستقیم و ساختار گروه‌های آبلی متناهی مولد
۳۲۰	۹. عملهای گروه بر گروه‌ها
۳۶۱	۱۰. قضایای انتقال و شکافتگی
۴۱۲	۱۱. گروه‌های پوچ توان و حل‌پذیر متناهی
۴۵۶	مراجع
۴۶۲	نمایه

فهرست نمادها

G, H, J, K, L	همواره معرف گروهها
γ	عضو همانی یک گروه
	زیرگروه بدیهی یک گروه
$o(g)$	مرتبه عضو g از یک گروه
$\langle g \rangle$	گروه دوری که عضو g تولید می‌کند
$ X $	تعداد اعضای مجموعه X اگر X متناهی باشد؛ یا ∞ اگر X نامتناهی باشد
$ X < \infty$	X یک مجموعه متناهی است
$Y \subseteq X$	Y یک زیرمجموعه X است
$Y \subset X$	Y یک زیرمجموعه حقیقی X است
$X \setminus Y$	مجموعه اعضای X که در Y نیست
$\emptyset$	مجموعه تهی
$H \leq G$	H یک زیرگروه G است
$H < G$	H یک زیرگروه حقیقی G است
Hg	هم مجموعه راست H در G شامل g (که $g \in G$ و $H \leq G$)
gH	هم مجموعه چپ H در G شامل g (که $g \in G$ و $H \leq G$)
$ G : H $	شاخص H در G (که $H \leq G$)

۲ درسی در نظریه گروه‌ها

$\varphi : X \rightarrow Y$	φ یک نگاشت از مجموعه X به مجموعه Y است
$x\varphi, x^\varphi, \varphi(x)$	نگاره عضو x تحت نگاشت φ
$\varphi : x \mapsto x\varphi$	نگاشت φ که عضو x را به عضو $x\varphi$ می‌فرستد
$G_1 \cong G_2$	گروه‌های G_1, G_2 یکرخت‌اند
$G_1 \not\cong G_2$	گروه‌های G_1, G_2 یکرخت نیستند
$\varphi _S$	تحدید نگاشت $\varphi : X \rightarrow Y$ به زیرمجموعه S از X
p	یک عدد اول
$\mathbb{N}$	مجموعه‌ای از اعداد اول
$\mathbb{C}$	میدان اعداد مختلط
$\mathbb{R}$	میدان اعداد حقیقی
$\mathbb{Q}$	میدان اعداد گویا
$\mathbb{Z}$	حلقه اعداد صحیح
$\mathbb{Z}_n$	حلقه اعداد صحیح به پیمانه n
$a \equiv b \pmod{n}$ (پیمانه n)	$a - b, n$ را می‌شمارد (که $a, b, n \in \mathbb{Z}$ با $n > 0$)
(a, b)	بزرگترین مقسوم علیه مشترک اعداد صحیح a, b
$\varphi(n)$	تعداد اعداد صحیح و مثبت m به طوری که $m \leq n$ و $(m, n) = 1$
$\nu(n)$	تعداد انواع گروه‌های مرتبه n
$\nu_a(n)$	تعداد انواع گروه‌های آبلی مرتبه n
$K \leq G$	K یک زیرگروه نرمال G است
$K \not\leq G$	K یک زیرگروه نرمال G نیست
G/K	گروه خارج قسمت G بر K (که $K \leq G$)
$K \triangleleft G$	K یک زیرگروه نرمال حقیقی در G است
$C_G(x)$	مرکز ساز x در G (که $x \in G$)
$Z(G)$	مرکز G
M_X	نیم‌گروه نگاشتهای مجموعه X به خودش
Σ_X	گروه متقارن (نامحدود) بر مجموعه X

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$	جایگشت مجموعه $\{1, 2, \dots, n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
Σ_n	که به ازای $n, 1, \dots, n$ ، j را بر a_j می نگارد گروه متقارن از درجه n
$\text{Im } \varphi$	نگاره همریختی φ
$K\varphi$	$\text{Im } \varphi _K$ (که $K \leq G$ و φ یک همریختی از G به یک گروه است)
R^+	گروه جمعی حلقه R
$\text{Hom}(G, A)$	گروه همریختیهای G به گروه آبلی A
$R^\times$	گروه یکه‌های حلقه R
$R_{\text{pos}}^\times$	گروه ضربی اعداد حقیقی مثبت
C_n	گروه دوری مرتبه n
C_∞	گروه دوری نامتناهی
$Q_{\text{pos}}^\times$	گروه ضربی اعداد گویای مثبت
V^+	گروه جمعی فضای برداری V
$\mathcal{L}(V)$	حلقه نگاشتهای خطی از فضای برداری V به توی خودش
$\text{GL}(V)$	گروه خطی عمومی فضای برداری V
$\text{GL}_n(F)$	گروه خطی عمومی از درجه n در میدان F
$\text{Aut } G$	گروه خودریختیهای G
$g^{-1}Kg$	ترویج K به وسیله g (که $g \in G, K \leq G$) همچنین نماد متراود K^g به کار می رود
$\text{Inn } G$	گروه خودریختیهای داخلی G
$\text{Isom } X$	گروه طولیایهای فضای متری X
$S_X(Y)$	گروه تقارن زیرفضای Y نسبت به فضای متری X
E^τ	فضای اقلیدسی
$\text{Tr } E^\tau$	گروه انتقالهای E^τ
$\text{Rot}(E^\tau; s)$	گروه دورانهای E^τ حول نقطه s
D_{2n}	گروه دو وجهی از مرتبه $2n$ ($n \geq 3$)
D_∞	گروه دو وجهی نامتناهی
$\langle X \rangle$	زیرگروه G که توسط X ($\subseteq G$) تولید می شود

۴ درسی در نظریه گروهها

$\langle x_1, \dots, x_n \rangle$	$\{\{x_1, \dots, x_n\}\}$
(H, K)	الحاق زیرگروههای H ، K از G به هم
$X \times Y$	حاصلضرب دکارتی مجموعه‌های X و Y
$H \times K$	حاصلضرب مستقیم H و K
$G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$	حاصلضرب مستقیم $G_1, G_2, \dots, G_n$
H_G	مغز H در G ($H \leq G$)
$\ker \varphi$	هسته همریختی φ
XY	حاصلضرب مجموعه‌یی زیرمجموعه‌های X ، Y از G
$2(G)$	نیم‌گروه زیرمجموعه‌های نابديهی G
$\Sigma(X)$	تحدید گروه‌متقارن روی مجموعه X
$n\mathbb{Z}^+$	گروه (جمع‌ی) مضارب صحیح n
$\text{SL}_n(F)$	گروه خطی خاص از درجه n روی میدان F
$C_G(H)$	مرکز ساز H در G ($H \leq G$)
C_p^∞	گروه شبه - دوری برای عدد اول p
$O_\omega(G)$	ω رادیکال
$G/O^\omega(G)$	ω مانده‌یی G
$[g_1, g_2]$	جابه‌جاگر اعضای g_1 و g_2 از G
$[H, K]$	زیرگروه جابه‌جاگر متناظر با زیرگروههای H و K از G
G'	گروه مشتق G
$N_G(H)$	نرمال‌ساز H در G ($H \leq G$)
H^G	بستار نرمال H در G ($H \leq G$)
Q_8	گروه چهارتاییها
A_n	گروه متناوب درجه n
$\text{PSL}_n(F)$	گروه خطی خاص تصویری از درجه n روی میدان F
$S_{pm}(F)$	گروه الصافی از درجه $2m$ روی میدان F
$\text{PS}_{pm}(F)$	گروه الصافی تصویری از درجه $2m$ روی میدان F
$\text{Stab}_G(x)$	پایدارساز x در G (که در آن G بر X عمل می‌کند و $x \in X$)
ρ^H	نمایش جایگشتی G متناظر با عمل G توسط ضرب از راست بر مجموعه هم‌مجموعه‌های راست H در G (که در آن $H \leq G$)

x^g	$g^{-1}xg$ (که در آن $x, g \in G$)
$k(G)$	عدد رده‌ای G
U^g	تزیج U توسط g ($g \in G, \emptyset \subset U \subseteq G$)
$N_G(U)$	نرمال‌ساز U در G ($\emptyset \subset U \subseteq G$)
$C_G(U)$	مرکزساز U در G ($\emptyset \subset U \subseteq G$)
$C_G^*(x)$	مرکزساز تعمیم‌یافته x در G ($x \in G$)
$\text{Fix}_X(G)$	زیرمجموعه نقاط ثابت X (در عمل G روی مجموعه X)
$G \geq H$	H زیرگروهی از G است
$G > H$	H یک زیرگروه حقیقی G است
$G \geqslant H$	H یک زیرگروه نرمال G است
$j(G : H)$	تعداد عاملهای ترکیبی G بالای H در یک سری ترکیبی G
$\kappa(G, H)$	مجموعه عاملهای ترکیبی G بالای H
$G^{(0)}, G', G'', G''', \dots, G^{(n)}, \dots$	جملات سری مشتق G
$\Gamma_1(G), \Gamma_2(G), \dots, \Gamma_n(G), \dots$	جملات سری مرکزی پایین‌رونده G
$Z_*(G); Z_1(G), \dots, Z_n(G), \dots$	جملات سری مرکزی بالا‌رونده G
$C_G(H/K)$	مرکزساز H/K در G (که $K \leq H \leq G$ و $K \trianglelefteq G$)
$[G_1, G_2, \dots, G_n]$	زیرگروه جابه‌جاگر زیرگروه‌های $G_1, \dots, G_n$
$F(G)$	زیرگروه فیتینگ G
$S(G)$	سکوی G
$\prod_{i=1}^n G_i$	حاصلضرب زیرگروه‌های نرمال $G_1, \dots, G_n$ در G
$\text{Dr} \prod_{i=1}^n G_i$	$G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$
$\sum_{i=1}^n \varphi_i$	مجموعه هم‌ریختیهای $\varphi_1, \dots, \varphi_n$
G^X	مجموعه نگاشتها از مجموعه X به گروه G
$\text{Dr } G^X$	توان مستقیم G با مجموعه اندیس‌گذار X
$\text{Cr } G^X$	توان دکارتی G با مجموعه اندیس‌گذار X
$T(G)$	زیرگروه تابدار G (G آبلی)
G^n	زیرگروه توانهای n عناصر G (G آبلی)
$H_\varphi \times K$	حاصلضرب نیم‌مستقیم K در H با عمل φ

۶ درسی در نظریه گروهها

$\text{Hol } K$	تمامریخت K
$\text{Dih } A$	گروه دو وجهی تعمیم یافته متناظر با گروه آبلی A
$\mathcal{A}(V)$	گروه آفین فضای برداری V
$G \wr H$	حاصلضرب حلقوی G توسط H
$\overline{\omega}'$	مجموعه اعداد اول که به مجموعه ω تعلق ندارند
T/U	عضو خاصی از بخش آبلی H/J از G متناظر با تراگردهای T, U به H در G
$\text{Foc}_G(H)$	زیرگروه کانونی H در G ($H \leq G$)
$x \stackrel{G}{=} y$	x و y در G مزدوج اند ($x, y \in G$)
$\Phi(G)$	زیرگروه فراتینی G
$N_G(y)$	نرمال ساز دستگاهی از G که با دستگاه مکمل y از G متناظر است (G است).

پیشگفتار

ویلیام برنساید^۱ در انجمن ریاضی لندن در سال ۱۹۰۸، در سخنرانی خود به مناسبت عضویت در انجمن پادشاهی لندن [آکادمی علوم]، چنین اظهار می‌دارد که:

‘بدون تردید باید این واقعیت را پذیرفت که تاکنون نظریه‌ی گروه‌های متناهی در برانگیختن علاقه‌ی کسی جز تعداد خیلی از ریاضیدانان انگلیسی موفق نبوده است...’ (عین سخنرانی در گزارش جلسات انجمن ریاضی لندن [۱۹۱۲] چاپ شده است). و در خاتمه سخنانش را با این گفته‌ها به پایان می‌برد: ‘دست آخر می‌خواهم از کسانی که تعلیم ریاضیدانان جوان ما را در شاخه‌ی ریاضیات محض به عهده دارند خواهش کنم کاری کنند تا مطالعه و تحصیل نظریه‌ی گروه‌ها (که به‌طور کلی در همه جا به رسمیت شناخته شده است) در این کشور شکوفا شود. اگر گنجاندن این درس در برنامه‌ی درسی توصیه شود و از اهمیت دارا بودن دانشی از نظریه‌ی گروه‌ها برای ریاضیدانان ریاضیات محض پافشاری شود یقین دارم که طولی نخواهد کشید که تقاضای تدریس جدی این درس پدید خواهد آمد.’

در هفتاد سال قبل چنین تقاضایی بندرت ضرورت پیدا می‌کرد: اکنون اهمیت همه جانبه نظریه‌ی گروه‌ها به‌طور کامل شناخته شده و اثرات مثبت آن در تدریس ریاضی دانشگاه‌ها و کالج‌ها منعکس شده است. بدون شک این موضوع نه در مقیاس کم، بلکه به‌طور وسیع از اثرات عمیق کتاب خود برنساید در موضوع نظریه‌ی گروه‌ها بوده که با چیره‌دستی نوشته شده است ([۱۳b]). امروزه در دانشگاه‌های انگلیس وجود درسهای مقدماتی درباره‌ی گروه‌ها و دیگر ساختارهای جبری برای سال اول دوره‌های کارشناسی امری عادی شده است. اثر حاضر مطالبی را برای درسهای پیشرفته در نظریه‌ی گروه‌ها در اختیار ما می‌گذارد. مطالب گردآوری شده در این کتاب براساس درسهایی بوده که مؤلف در دانشگاه نیوکاسل (در ساحل رود تاین) برای دانشجویان ممتاز سال سوم کارشناسی و دوره‌های کارشناسی ارشد تدریس کرده است.

فرض بر این است که خواننده با محتویات دوره‌های مقدماتی درس که در بالا بدان اشاره شد آشنایی دارد. بخصوص اطلاعاتی در مورد مفاهیم رده‌های یکرختی گروهها، گروههای دوری و گروههای آبلی، زیرگروهها و هم مجموعه‌ها؛ قضیه لاگرانژ؛ مرتبه اعضا؛ گروههای متقارن و تجزیه یک جایگشت به حاصلضرب دورههای مجزا و همچنین ویژگیهای بسیار مقدماتی از فضاهای برداری؛ نگاشتهای خطی و ماتریسها، میدانها و حلقه‌ها برای خوانندگان این کتاب دانسته فرض شده است. خلاصه‌ای از ویژگیهای مقدماتی مسلم گروهها در فصل ۵ این کتاب به منظور تثبیت ندهایی که در سرتاسر این کتاب به‌کار رفته گنجانده شده است.

پس از فصل ۵ فصل کوتاهی، که فصل ۶ است، آمده است. این فصل پیشگفتاری است برای تمامی کتاب و سعی دارد که موضوعات مهم و متنوع کتاب را بر حسب مفاهیم قابل درک برای خواننده بیان و آنها را بر اساس دانسته‌های قبلی وی دنبال کند. هدف فراهم کردن انگیزه‌ای برای برخی از تعاریف فنی و شیوه‌هایی است که در قسمتهای بعدی کتاب با جزئیات بیشتر مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل ۶ تأکید کامل بر گروههای متناهی است که فی‌الواقع اشیای اولیه مطالعه در تمامی این کتاب است. با این همه تلاشی صورت گرفته که از محدودیتهای متناهی، تا جایی که افزودن آنها سهولتی در بحث ایجاد نمی‌کند، اجتناب شود و ضمناً بعضی از قضایای مهم مربوط به گروههای نامتناهی که به‌طور طبیعی پدید می‌آیند در فصولی از این کتاب، به‌ویژه در فصلهای ۷ و ۸، گنجانده شوند.

بررسی نظاممند در فصل ۲ آغاز می‌شود که در آن بسیاری از مثالهای پایه معرفی می‌شوند، مثالهایی که به دفعات در سرتاسر کتاب تکرار می‌شوند. فصول بعدی با تأمل و تأنی با اتخاذ مهمترین خط‌مشیهای دنبال می‌شود که به توسعه موضوع می‌پردازد و سعی بر آن دارد که به جای یک برداشت تدریجی به روش وحدت‌بخشی ادامه یابد. عناوین انتخاب‌شده برای هر فصل موضوعات آن فصل را معرفی می‌کنند. به‌طور خلاصه می‌توان گفت که فصلهای ۳، ۷، ۸ و ۹ با ساختار طبیعی، گروهها سروکار دارند و فصلهای ۴، ۵ و ۶ با ساختارهای حسابی. درحالی‌که فصلهای ۱۰ و ۱۱ به مباحثی مربوط‌اند که به کنش متقابل بین ساختارهای طبیعی و حسابی اختصاص داده شده است. بر مفهوم عمل گروهها تأکید ویژه‌ای شده است. این موضوعی است که از لحاظ درک، اهمیت زیادی دارد، زیرا معرف روشی است که توسط آن گروهها در ریاضیات ظاهر می‌شوند و در ضمن به عنوان یک روش پر قدرت در خود نظریه گروهها مطرح می‌شود. اطلاعات اساسی در مورد عمل گروهها در فصلهای ۴ و ۹ داده شده‌اند؛ و کاربردهایشان در فصول ۵ و ۱۰.

فصل ۱۰ توضیح ویژه‌ای را طلب می‌کند. این فصل به شرحی از یک برداشت زیبا از

مفاهیم کلاسیک انتقال و شکافنگی، با اتکا به دلایل عمل گروه، تخصیص داده شده که منتج از بحثهای پرفسور هلموت ویلانت^۱ در مورد عمل گروههاست که در یکی از سخنرانیهایش در مؤسسه پژوهشهای ریاضی در بخش اوپرول^۲ در ماه مه ۱۹۷۲ ایراد نموده است. این سخنرانی مهم و بسیار اثر بخش قدرت تکنیکهای عمل گروه را در درون نظریه گروهها بدیهی ساخته است. این موضوع قبلاً در جایی چاپ نشده و من بی‌اندازه مدیون پرفسور ویلانت هستم که اجازه دادند این مطلب را در اینجا درج نمایم.

هر کتابی که سعی در ارائه یک شرح کلی از نظریه گروهها داشته باشد، بناچار باید مطالب را گزینشی اختیار کند. برای کارآموزان این رشته که این کتاب را بررسی می‌کنند، احتمالاً مطالب محذوف بیشتر قابل توجهند تا موضوعاتی که برای درج انتخاب شده‌اند. در عرصه اثر حاضر، خود من با یک بررسی دقیق، از دو موضوع مهم محذوف در این کتاب آگاهی یافته‌ام که یکی نظریه نمایش گروههای متناهی (و موضوع مربوط به سرشتهای گروه) است و دیگری موضوع روابط تعریف‌کننده گروههاست. از بین این دو موضوع مهم حذف شده به نظر می‌رسد که موضوع اول موجب تعجب باشد، چرا که در موضوع اول تأکید بر عمل گروه است زیرا نظریه نمایش را می‌توان از منظر عمل گروه بر فضاهای برداری (همچنانکه در ابتدای فصل ۹ توضیح داده شده) مورد بررسی قرار داد. ولی احساس من این است که یک بررسی رضایتبخش در هر یک از این دو موضوع، محتوای کتاب را به نحو غیر قابل قبولی به درازا می‌کشد. به علاوه یک بررسی جامع از روابط تعریف‌کننده گروه ما را با نظریه گروههای آزاد درگیر می‌کند، که در عین حال یک موضوع اساسی است، اما طبعاً با مباحث مورد مطالعه این کتاب مغایرت دارد. بررسیهای خوبی از هر دو موضوع یعنی نمایش گروهها و روابط تعریف‌کننده گروه در بسیاری از کتابهای عمومی در نظریه گروهها انجام گرفته که فهرست آنها در انتهای این کتاب آمده است. همچنین تعدادی از مراجع ویژه درباره نظریه نمایش گروهها در ابتدای فصل ۹ دیده می‌شود. در موضوع روابط تعریف‌کننده گروه علاقه مندم که به مرجع مهم [۶b] کار مشترک ه. س. م. کاکستر^۳ و و. ا. ج. موزر^۴ و نیز کتاب اخیر دل. جانسن مرجع^۵ [۲۲b] اشاره کنم.

کتاب حاضر به بخشهای کوتاهی تنظیم شده که در هر فصل پشت سر هم شماره‌گذاری شده است. در موارد بسیاری یک بخش اختصاص داده شده است به یک حکم و اثبات یک قضیه تنها که در قسمتهای دیگر کتاب، با ذکر شماره آن بخش، به آن ارجاع می‌شود. نتایج مهمتر تحت عنوان 'لم' یا 'قضیه' آمده‌اند.

تمرینات خود به تنهایی یک بخش اساسی از این کتاب را تشکیل می‌دهند. این تمرینات به‌طور متوالی از ۱ تا ۶۷۹ شماره‌گذاری شده‌اند و شماره‌های آنها با حروف سیاه وارد شده‌اند. هدف از تمرینات ۱ تا ۱۲ که در انتهای فصل ۰ آمده‌اند، در دسترس قراردادن مطالبی است که دانستن آنها از سوی خواننده مسلم گرفته شده‌اند. تمریناتی برای فصل ۱ در نظر گرفته نشده است. از فصل ۲ به بعد تمرینات در سرتاسر کتاب به فواصل تقریباً مساوی آمده‌اند. هدف این تمرینات روشن کردن و وسعت بخشیدن به مطالب مطرح شده در کتاب است، بلافاصله بعد از اینکه اثبات شده‌اند. ارجاعات زیادی به تمرینات در این کتاب به‌ویژه در فصلهای آخر داده شده است. این ارجاعات صرفاً با ذکر شماره آنها صورت گرفته‌اند و امید است که توزیع منظم این تمرینات و سیاه‌بودن شماره‌ها، پیدا کردن آنها را بدون ذکر شماره صفحات دچار اشکال نکند. در احکام بسیاری از این تمرینها عبارتهای امری متداول 'ثابت کنید که' یا 'نشان دهید که' حذف شده‌اند؛ ولی اینها احکامی هستند که باید ثابت شوند. تصور می‌کنم که تعداد کمی از خوانندگان این کتاب احتمالاً به حل تمامی تمرینات بپردازند. ولی تعدادی از تعاریف و قضایا در تمرینات مطرح شده‌اند که به دلیل ضرورت وجودی آنها در متن اصلی کتاب، شماره‌های آنها با علامت ستاره از بقیه تمرینات متمایز شده‌اند (مثل ۱*). اکثر این تمرینات خیلی ساده‌اند و بسیاری از تمرینات مشکندر با راهنمایی‌هایی که برای حل آنها توصیه شده همراهند.

به بعضی از قضایای مندرج در این کتاب، تاریخی ضمیمه شده است تا چشم‌انداز تاریخی توسعه موضوع را برساند. به همین دلیل مراجع متفاوتی از مقالات و کتب در انتهای کتاب آمده است. ولی ادعایی به تاریخی بودن کتاب ندارم. زیرا این کتاب قرار است راجع به نظریه گروهها باشد نه در مورد تاریخ این موضوع. برای اطلاعی از گزارش تاریخی و نحوه گسترش نظریه گروه خواننده می‌تواند به کتاب ه. ووسینگ^۱ [b۴۰] مراجعه کند.

مراجع آثار نویسندگان دیگر به مقالاتی که جلوی شماره آنها حرف 'a' گذاشته شده و کتبی که جلوی شماره آنها حرف 'b' علاوه شده تقسیم شده‌اند. آثار فهرست شده عمدتاً مربوط به کتابهایی هستند که در کتاب به آنها ارجاع شده است و به هیچ وجه فهرست کامل و جامعی از کتابشناسی موضوع نیست. بسیاری از نویسندگانی که نامشان ذکر شده آثار مهم دیگری در نظریه گروهها نوشته‌اند و مسلماً اثرهای مهمی از پدیدآورندگان دیگر نیز وجود دارند که از آنها نامی برده نشده است. یک نشان از حجم نشریات مربوط به نظریه گروهها در سالهای ۱۹۴۰ - ۱۹۷۰ را می‌توان از مجلدات مجله ادواری^۲ *Mathematical Reviews* با عنوان: بازنگری^۳ در گروههای متناهی (دانیل گورنشتاین^۴، انجمن ریاضی آمریکا ۱۹۷۴) و بازنگری در گروههای نامتناهی

(ج. باؤمزلاگ^۱ انجمن ریاضی آمریکا ۱۹۷۴ در دو مجلد) می‌توان به‌دست آورد.
در مورد ریاضیدانانی که در نظریهٔ گروه‌ها متشاه تأثیر اولیه در من بوده‌اند این شانس را داشته‌ام که در کلاسهای درس پروفیسور و.ا.ل.اج^۲ در ادینبرگ^۳، پروفیسور ف.هال^۴ و دکتر د.ر.تانت^۵ در کیمبریج، پروفیسور ب. هوپرت^۶ در ماینز^۷، و پروفیسور ه. ویلانت^۸ در توپینگن^۹ حضور پیدا کنم. اگرچه ممکن است دیدگاه‌ها یا روشهای برخورد من با موضوعی که از درسهای خود آنها استخراج کرده و در اینجا به کار برده‌ام مورد توجه آنها قرار نگیرد. ولی دلم می‌خواهد دینی را که در خود احساس می‌کنم به همگی آنها ادا کنم، آنها که انگیزه‌های اولیه را در من به‌وجود آوردند و موجب شدند که من این موضوع را دنبال کنم، به‌ویژه پروفیسور ویلانت به دلیل مطالب فصل ۱۰ که قبلاً از آن صحبت کرده‌ام.

نیوکاسل ساحل رود تاین

۲۶ می ۱۹۷۶