

درآمدی به نظریه مجموعه‌ها

ویرایش سوم، با افزایش و پیرایش بسیار

کارل هرباتسک

توماس یخ

ترجمه

دکتر سعید مقصودی

دکتر سیدمجید جعفریان امیری

سرشناسه: هرباتیسیک، کارل Hrbacek, Karel
 عنوان و نام پدیدآور: درآمدی به نظریه مجموعه‌ها/ کارل هرباتیسیک، توماس یخ؛
 ترجمه سعید مقصودی، مجید جعفریان امیری
 مشخصات نشر: زنجان، دانشگاه زنجان، ۱۳۹۰.
 مشخصات ظاهری: ۴۸۸ص: مصور.
 شابک: ۸۰۰۰۰۰ ریال: ISBN 978-964-8885-40-8
 وضعیت فهرست‌نویسی: فیبا
 یادداشت: عنوان اصلی: Introduction to set theory, 3rd ed., 1999
 یادداشت: واژه‌نامه
 موضوع: نظریه مجموعه‌ها
 شناسه افزوده: یخ، توماس ج. Jech, Thomas J.
 شناسه افزوده: مقصودی، سعید، ۱۳۵۳-
 شناسه افزوده: جعفریان امیری، سید مجید، ۱۳۵۶-
 رده‌بندی کنگره: Q.۲۲۴۸
 رده‌بندی دیویی: ۵۱۱/۳۲۲
 شماره کتابشناسی ملی: ۲۵۲۱۵۰۱



انتشارات دانشگاه زنجان

درآمدی به نظریه مجموعه‌ها، ویرایش سوم، با افزایش و پیرایش بسیار

مؤلف: کارل هرباتیسیک، توماس یخ
 ترجمه: دکتر سعید مقصودی، دکتر سید مجید جعفریان امیری
 ویراستار: دکتر علیرضا امینی هرنندی

امور فنی و ناظر چاپ: کانون رسا

چاپ اول: پاییز ۱۳۹۰

شمارگان: ۱۱۰۰ نسخه

قیمت: ۸۰۰۰۰ ریال

نشانی: زنجان، کیلومتر ۵ جاده تیریز، دانشگاه زنجان، معاونت پژوهشی، واحد انتشارات

تلفن: ۰۲۴۱ - ۵۱۵۲۶۶۱ فکس: ۰۲۴۱ - ۲۲۸۳۰۷۷

شابک: ۹۷۸-۹۶۴-۸۸۸۵-۴۰-۸ ISBN: 978-964-8885-40-8

مرکز پخش: کتابیران

فروشگاه شماره ۱: تهران، خیابان انقلاب، بین فروردین و فخر رازی، مجتمع

فرهنگی فروزنده، طبقه همکف، واحد ۳۱۶ تلفن: ۴-۶۶۹۵۲۹۳۳

فروشگاه شماره ۲: تهران، خیابان انقلاب، بین فروردین و فخر رازی، مجتمع

فرهنگی فروزنده، طبقه همکف، واحد ۳۱۹ تلفن: ۶۶۹۶۳۵۵۴

جناب دکتر مقصودی،

من و همکارم بسیار خوشحالیم که تصمیم گرفتید کتاب ما را به فارسی ترجمه کنید. امیدوارم این کتاب برای دانشجویان نظریه مجموعه‌ها در ایران مفید باشد. مطلبی به نظرم نمی‌رسد که می‌خواهم به پیشگفتار ویرایش سوم اضافه کنم؛ فقط لطفاً یک نسخه از کتاب را وقتی آماده شد برای من ارسال کنید.

با احترام

توماس یخ

۲۸ فوریه ۲۰۱۱

پیشگفتار مترجمان

امروزه امری مسلم است که در ریاضیات بدون آنچه گئورگ کانطور در خلال سال‌های ۱۸۷۹ تا ۱۸۸۴ به جهان ریاضیات عرضه کرد چیز زیادی نمی‌توان گفت. کتابی که پیش روی دارید ترجمه کتابی است که برای تدریس در دوره کارشناسی و سال اول کارشناسی ارشد در دانشگاه‌های آمریکا نوشته شده است و یکی از بهترین کتاب‌ها در این زمینه است. هم کتاب و هم نویسندگان آن بی‌نیاز از تعریف‌اند و فقط به این نکته اشاره می‌کنیم که این کتاب تاکنون سه بار ویرایش و چاپ شده است. در این کتاب نویسندگان بدون درگیر شدن در صورتگرایی منطقی به ارائه نظریه مجموعه‌ها به روش اصل موضوعی می‌پردازند. تا آنجا که ما می‌دانیم این کتاب بعد از کتاب بسیار خواندنی و کلاسیک هالموس تنها کتابی است که به زبان فارسی به این موضوع می‌پردازد. البته این کتاب نه از لحاظ حجم و نه از لحاظ سبک و محتوی قابل مقایسه با کتاب هالموس نیست. ما نیز همانند نویسندگان کتاب امیدواریم این کتاب برای دانشجویان و علاقه‌مندان فارسی‌زبان نظریه مجموعه‌ها مفید باشد.

اما چند جمله‌ای درباره این ترجمه. کوشیده‌ایم تعادلی بین روان بودن متن و وفاداری به اصل برقرار سازیم. برای یکدست بودن ترجمه، به دلایلی، تصمیم بر آن شد که یکی از ما (م. ج. ا.) بخش تمرین‌ها و دیگری (س. م.) مابقی متن را ترجمه و متن را یکدست کند. برابرهاده اصطلاحات تخصصی را تماماً مطابق با واژه‌نامه

انجمن ریاضی ایران آورده‌ایم. در موارد دیگر از برابر نهاده‌هایی که در مجلات تخصصی و ترجمه‌های معتبر به کار برده شده‌اند، استفاده کرده‌ایم. متأسفانه واژه‌نامه انجمن ریاضی بسیار قدیمی است و نیاز به تدوین واژه‌نامه و یا واژه‌نامه‌هایی در حوزه‌های مختلف ریاضی به شدت احساس می‌شود. در ضبط اسامی خاص سیاست گفته‌شده در پیشگفتار کتاب فرهنگ تلفظ نامهای خاص (ف. مجیدی، فرهنگ معاصر، ۱۳۸۱) را برگزیده‌ایم و تمامی اسامی خاص را مطابق آن مرجع ضبط کرده‌ایم.

این ترجمه به سه تن وامدار است: اول، به سرکار خانم لطفی که در تبدیل دست‌نوشته‌های نه چندان خوانای اولیه به صورت زیبایی فعلی با نرم افزار فارسی‌تک از هیچ کوششی دریغ نورزیدند. دوم، دوست گرانقدرمان دکتر علیرضا امینی هرندی از دانشگاه تبریز که در پیراستن متن از لغزش‌های علمی سعی بلیغ کردند. و سوم، آقای دکتر محمد ابراهیم‌پور از دانشگاه تبریز که در ویرایش گفتار و نوشتار این ترجمه جهل تمام نمودند.

آخر از همه اما نه کمتر از همه، از پدر، مادر، همسر، و فرزندانمان بی‌نهایت سپاسگزاریم. به آن‌ها بیش از آنچه قادر به بیان آن باشیم مدیونیم. به نشانه قدرشناسی این ترجمه را به آن‌ها تقدیم می‌کنیم.

سعید مقصودی

سید مجید جعفریان امیری

تابستان ۱۳۹۰

پیشگفتار ویرایش سوم

نه تنها از زمان چاپ ویرایش نخست این کتاب در سال ۱۹۷۸ که حتی از زمان عرضه ویرایش دوم در سال ۱۹۸۴ به بعد، شاهد رشد فوق‌العاده‌ای در نظریه مجموعه‌ها بوده‌ایم. علاوه بر این، بسیاری از اندیشه‌هایی که در آن زمان در مرز تحقیقات بودند، اکنون ابزارهای مهمی در دیگر شاخه‌های ریاضیات به حساب می‌آیند. برای مثال، هم‌اکنون اصل‌های ترکیبیاتی مانند اصل لوزی و اصل مارتین، ابزارهای ناگزیری در توپولوژی عمومی و جبرند. مجموعه‌های غیردرست‌بنیان به زمینه مناسبی برای معناشناسی زبان‌های ساختگی و همچنین برای زبان‌های طبیعی تبدیل شده‌اند. آنالیز غیراستاندارد، که بر ساختارهایی مبتنی بر فراپالایه‌ها بنا شده است، به یک فن و مبحث مستقل با بسیاری کاربردهای شکفت‌انگیز گسترش یافته است. گنجاندن برخی از اندیشه‌های نظریه مجموعه‌ای مذکور در کتابی درسی که به منظور درآمدی عمومی به موضوع در نظر گرفته شده است، مناسب به نظر می‌رسد. این کار را در قالب چهار فصل جدید (فصل‌های ۱۱-۱۴)، که خود موضوعات فصل ۱۱ ویرایش دوم را بسط می‌دهند و شامل بسیاری مطالب جدید دیگر نیز می‌باشند، انجام داده‌ایم. فصل ۱۱ مفاهیم پالایه‌ها و فراپالایه‌ها را عرضه می‌کند و همچنین خواص پایه‌ای مجموعه‌های بسته بی‌کران و مانا را بسط می‌دهد و با اثباتی از قضیه سیلور خاتمه می‌یابد. دو بخش اول فصل ۱۲ درآمدی به حسابان در اختیار می‌گذارند. در دو بخش بعدی آن فصل، درخت‌ها را مورد

بررسی قرار می‌دهیم و رابطه آن‌ها با مسئله سوسلین نشان داده می‌شود. بخش ۵ از فصل ۱۲ درآمدی است بر اصول ترکیبیاتی. فصل ۱۳ به مسئله اندازه و اعداد اصلی اندازه‌پذیر اختصاص دارد. موضوع فصل ۱۴ بررسی نسبتاً جامعی از مجموعه‌های درست‌بنیان و غیردرست‌بنیان است.

فصل‌های ۱ تا ۱۰ ویرایش دوم به‌طور کامل بازنگری و با ترتیب جدیدی نوشته شده است. مطالب مربوط به اعداد گویا و گنگ در فصل ۱۰ ادغام شده‌اند. در نتیجه وقفه‌ای در ارائه نظریه خالص مجموعه‌ها ایجاد نمی‌کند. به منظور حفظ پیوستگی مطالب، بخشی دربارهٔ برش‌های ددکیند به فصل ۴ افزوده شده است. مطالب جدیدی نیز (دربارهٔ صورت‌های نرمال و دنباله‌های گودستاین) به فصل ۴ افزوده شده است.

یک درس اساسی و پایه در نظریه مجموعه‌ها باید بیشتر فصل‌های ۱ تا ۹ را در برگیرد. با افزودن مطالب اضافی از فصل‌های ۱۰ تا ۱۴، که کاملاً از یکدیگر مستقل هستند (به جز بخش ۵ فصل ۱۲ و فصل ۱۳ که به برخی مفاهیم تعریف‌شده در فصل‌های قبلی ارجاع می‌دهند) درس را می‌توان تکمیل کرد.

کارل هرباتسک

توماس یخ

پیشگفتار ویرایش دوم

نسخه اولیه این کتاب درسی در بهار سال ۱۹۶۸ به زبان چک نوشته شد و انتشارات آکادمیای پراگ آن را تحت عنوان «Úvod do teorie množin» برای چاپ پذیرفت. با این حال، در آن سال ما هر دو کمی بعد چکوسلوواکی را ترک کردیم و در نتیجه کتاب هرگز انتشار نیافت. در سال‌های بعد، ما نظریه مقدماتی مجموعه‌ها را در دانشگاه‌های مختلف ایالات متحده درس دادیم و دریافتیم که انتخاب کتابی مناسب این درس دشوار است. برخی از کتاب‌های موجود، مبتنی بر رویکرد طبیعی به جای رویکرد اصل موضوعی به نظریه مجموعه‌ها هستند. ما آشنایی با پارادوکس‌های نظریه مجموعه‌ای و گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر (مانند فرض پیوستار) را یکی از اهداف مهم درس نظریه مجموعه‌ها به حساب می‌آوریم. اما با رویکرد طبیعی، هیچ یک از این مباحث نمی‌توانند آن‌چنان‌که باید بررسی شوند. به علاوه، نظریه مجموعه‌ها انتخاب دانشجویی است که بخواهد برای اولین بار بسط اصل موضوعی شاخه‌ای از ریاضیات را ببیند. از سوی دیگر، بسیاری از کتاب‌های موجود نظریه مجموعه‌ها با دیدگاه اصل موضوعی، تأکید بسیاری بر منطق و صورتگرایی منطقی دارند. بیشتر آن‌ها با چیزی شبیه یک دوره درس منطق شروع می‌شوند. حال آنکه متوجه شده‌ایم که دانشجویان اغلب درس نظریه مجموعه‌ها را قبل از درس منطق اخذ می‌کنند. مهم‌تر از این آنکه تأکید بر صورتگرایی جوهره روش اصل موضوعی را از نظر پنهان می‌سازد. احساس کردیم به کتابی نیاز است که نظریه اصل

موضوعی مجموعه‌ها را با دیدی ریاضی، با سطح دقتی در حد معمول دیگر دروس رشته ریاضی ارائه کند. این نیاز ما را بر آن داشت تا متن نگاشته شده به زبان چکی فوق‌الذکر را از نو بازنویسی کنیم. ما طرح کلی اولیه را حفظ کردیم. متنها الزاماتی که کتاب درسی مناسب دانشگاه‌های آمریکا داشت منجر به کاری کاملاً جدید شد. مایلیم بر ویژگی‌های زیر از کتاب حاضر تأکید کنیم:

(۱) نظریه مجموعه‌ها به‌طور اصلی موضوعی بسط داده شده است. به دلایل اتخاذ هر اصل موضوع، که هم از شهود و هم از رویه جاری ریاضیات سرچشمه می‌گیرند، به دقت اشاره شده است. مواردی که محل مناقشه‌اند، مانند اصل انتخاب، مفصلاً بحث شده‌اند.

(۲) رویکرد ما صوری نیست. ابزارهای منطقی را در سطح حداقل نگه داشته‌ایم و از صورتگرایی منطقی کاملاً پرهیز کرده‌ایم.

(۳) با پروراندن مفاهیم نظریه اعداد طبیعی، گویا و حقیقی بر اساس نظریه مجموعه‌ها نشان خواهیم داد نظریه اصل موضوعی مجموعه‌ها به قدر کافی توانا هست تا چارچوبی برای ریاضیات در اختیار گذارد. با وجود این، این کار را تا جایی پیش گرفته‌ایم که در روشن کردن آن اندیشه کلی و ایجاد انگیزه برای تعمیم‌های نظریه مجموعه‌ای برخی از این مفاهیم (مانند اعداد ترتیبی و اعمال روی آن‌ها) مفید بوده است. جزئیات خسته‌کننده و تکراری، مانند اثبات‌های قواعد معمول حساب، به قسمت تمرین‌ها برده شده‌اند.

(۴) در هر بخش تمرین‌های بسیاری با درجه سختی متفاوت آورده شده است.

(۵) بخش قابل ملاحظه‌ای از کتاب را به بررسی اعداد اصلی و ترتیبی اختصاص داده‌ایم.

(۶) فصل آخر ارائه غیررسمی نکات عمده برخی از پیشرفت‌های اخیر نظریه مجموعه‌ها به همراه بیان اهمیت آن‌ها در دیگر حوزه‌های ریاضیات است. این نکات عبارت‌اند از اصل ساخت‌پذیری، مسئله سازگاری و استقلال، و اعداد اصلی بزرگ. اثباتی ارائه نشده است، با این حال جزئیات تا آن اندازه بیان شده است که شخص غیرمتخصص از مسائل موجود در مبانی نظریه مجموعه‌ها و شیوه‌های حل آن‌ها و تأثیر آن‌ها روی ریاضیات به‌طور کلی، ایده‌هایی به دست آورد.

ویرایش اول این کتاب بارها به عنوان متن درسی در نظریه مجموعه‌ها در دوره‌های کارشناسی و سال اول کارشناسی ارشد استفاده شده است. تجربه شخصی ما و بسیاری از همکارانمان و پیشنهادها و انتقادهای منتقدان، ما را بر آن داشت تا برخی تغییرات و اصلاحات را در این ویرایش دوم کتاب اعمال کنیم. این تغییرات بسی گسترده‌تر از آنچه ما قصد آن را داشتیم از آب درآمد. نتیجه اینکه کتاب کلاً از نو نوشته شد و تفصیل یافت. در زیر عمده ویژگی‌های جدید را برمی‌شماریم:

(۱) بسط و شرح اعداد طبیعی در فصل ۳ به‌طور قابل ملاحظه‌ای ساده شده است. مبنای کار را تعریف مجموعه اعداد طبیعی به منزله کوچک‌ترین مجموعه استقرانی و اصل استقرا قرار داده‌ایم. معرفی مجموعه‌های متعدی و مشخص کردن اعداد طبیعی به منزله آن دسته از مجموعه‌های متعدی که خوش‌ترتیب‌اند و با رابطه $\leq$ به طور وارونه خوش‌ترتیب شده‌اند را تا فصل اعداد ترتیبی (فصل ۷) به تعویق انداخته‌ایم.

(۲) مطالب مربوط به اعداد گویا و صحیح (که در ویرایش اول فصل جداگانه‌ای بود) در یک بخش (بخش ۱ از فصل ۵) خلاصه شده‌اند. احساس ما این است که بیشتر دانشجویان این موضوع را در درس دیگری (جبر مجرد) می‌آموزند؛ و اساساً هم این موضوع به آن درس مربوط می‌شود.

(۳) تعدادی از بخش‌های جدید (بخش ۳ از فصل ۵، ۶ و ۹) به ویژگی‌های نظریه - مجموعه‌ای اعداد حقیقی (مانند مجموعه‌های باز، بسته و کامل و غیره) می‌پردازند و کاربردهای جالبی از نظریه مجرد مجموعه‌ها در آنالیز حقیقی را عرضه می‌کنند.

(۴) فصل جدیدی با عنوان «مجموعه‌های ناشمارا» (فصل ۱۱) افزوده شده است. این فصل برخی مفاهیم بنیادی نظریه جدید مجموعه‌ها؛ مانند فرآبالایه‌ها، مجموعه بسته بی‌کران، درخت‌ها و افزازها، و اعداد اصلی بزرگ را معرفی می‌کند. از این مباحث می‌توان به‌منظور غنی ساختن درس یک ترمی معمول (که معمولاً بیشتر مطالب فصل‌های ۱ تا ۱۰ را دربرمی‌گیرد) بهره گرفت.

(۵) بررسی ترتیب‌های خطی بسط یافته است و در یکجا نیز گرد آورده شده است (بخش ۴ فصل ۴).

(۶) افزایش‌ها، تغییرات، و اصلاحات جزئی عیدیه دیگری در سراسر متن

صورت گرفته است.

(۷) و بالاخره، بحث پیرامون موقعیت حاضر نظریه مجموعه‌ها در بخش ۳ از

فصل ۱۲ به‌روز شده است.

کارل هرباتسک

توماس یخ

www.ketab.ir

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

پنج	پیشگفتار مترجمان	
هفت	پیشگفتار ویرایش سوم	
نه	پیشگفتار ویرایش دوم	
۵	مجموعه‌ها	۱
۵	آشنایی با مجموعه‌ها	۱
۹	خاصیت‌ها	۲
۱۵	اصول موضوع	۳
۲۴	اعمال مقدماتی روی مجموعه‌ها	۴
۳۱	رابطه‌ها، تابع‌ها، و ترتیب‌ها	۲
۳۱	زوج‌های مرتب	۱
۳۳	رابطه‌ها	۲
۴۱	تابع‌ها	۳

۵۱	هم‌ارزی‌ها و افزازها	۴
۵۶	ترتیب‌ها	۵
۶۷	اعداد طبیعی	۳
۶۷	آشنایی با اعداد طبیعی	۱
۷۲	ویژگی‌های اعداد طبیعی	۲
۷۹	قضیه بازگشت	۳
۸۹	حساب اعداد طبیعی	۴
۹۳	عمل‌ها و ساختارها	۵
۱۰۹	مجموعه‌های متناهی؛ شمارا، و ناشمارا	۴
۱۰۹	عدد اصلی مجموعه‌ها	۱
۱۱۶	مجموعه‌های متناهی	۲
۱۲۳	مجموعه‌های شمارا	۳
۱۳۱	ترتیب‌های خطی	۴
۱۴۲	ترتیب‌های خطی کامل	۵
۱۴۹	مجموعه‌های ناشمارا	۶
۱۵۳	اعداد اصلی	۵
۱۵۳	حساب اعداد اصلی	۱
۱۶۰	عدد اصلی پیوستار	۲
۱۶۹	اعداد ترتیبی	۶
۱۶۹	مجموعه‌های خوش‌ترتیب	۱
۱۷۶	اعداد ترتیبی	۲
۱۸۲	اصل موضوع جایگزینی	۳
۱۸۸	بازگشت و استقرای ترامتناهی	۴
۱۹۵	حساب اوردینال‌ها	۵

۶	صورث نرمال	۲۵۳
۷	الفها	۲۱۱
۱	اوردینالهای آغازی	۲۱۱
۲	جمع و ضرب الفها	۲۱۷
۸	اصل موضوع انتخاب	۲۲۵
۱	اصل موضوع انتخاب و معادل‌های آن	۲۲۵
۲	کاربرد اصل موضوع انتخاب در ریاضیات	۲۳۷
۹	حساب اعداد اصلی	۲۵۳
۱	مجموع و حاصل ضرب‌های نامتناهی اعداد اصلی	۲۵۳
۲	کاردینال‌های منظم و تکن	۲۶۱
۳	توان کاردینال‌ها	۲۶۷
۱۰	مجموعه اعداد حقیقی	۲۷۵
۱	اعداد صحیح و گویا	۲۷۵
۲	اعداد حقیقی	۲۸۲
۳	توپولوژی خط حقیقی	۲۸۸
۴	مجموعه‌های اعداد حقیقی	۳۰۳
۵	مجموعه‌های بورل	۳۱۴
۱۱	پالایه‌ها و فراپالایه‌ها	۳۲۵
۱	پالایه‌ها و ایدال‌ها	۳۲۵
۲	فراپالایه‌ها	۳۳۱
۳	مجموعه‌های مانا و بسته بی‌کران	۳۳۶
۴	قضیه سیلور	۳۴۵

۳۴۹	۱۲	نظریه ترکیباتی مجموعه‌ها
۳۴۹	۱	قضایای رمزی
۳۵۷	۲	حساب افرازی برای کاردینال‌های ناشمارا
۳۶۲	۳	درخت‌ها
۳۷۰	۴	مسئله سوسلین
۳۷۶	۵	اصل‌های ترکیباتی
۳۸۷	۱۳	کاردینال‌های بزرگ
۳۸۷	۱	مسئله اندازه
۳۹۵	۲	کاردینال‌های بزرگ
۴۰۳	۱۴	اصل موضوع بنیان
۴۰۳	۱	رابطه‌های درست بنیان
۴۱۱	۲	مجموعه‌های درست بنیان
۴۱۹	۳	مجموعه‌های غیر درست بنیان
۴۳۱	۱۵	نظریه اصل موضوعی مجموعه‌ها
۴۳۱	۱	نظریه مجموعه‌های تسرملو-فرانکل با اصل انتخاب
۴۳۶	۲	سازگاری و استقلال
۴۴۷	۳	عالم نظریه مجموعه‌ها
۴۵۸		کتاب‌نامه
۴۶۱		فهرست اسامی خاص
۴۶۳		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۴۷۱		فهرست الفبایی